Matematyka A, kolokwium, 19 listopada 2007, 17:05 – 18:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. **(5 pt.)** Rozwiązać równanie: $2|x-1| + \sqrt{(3-x)^2} + |7-x| = 8$.

---

2. **(2 pt.)** Podać definicję kosinusa dowolnego kąta $t > 0$.

(2 pt.) Rozwiązać równanie $y^2 - 3y + 2 = 0$.

(3 pt.) Rozwiązać nierówność $2\cos^4 t - 3\cos^2 t + 1 > 0$.

(3 pt.) Na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ zaznaczyć łuki złożone z punktów, przez które przechodzi drugie ramie kąta spełniającego tę nierówność przy założeniu, że pierwszym ramieniem takiego kąta jest półprosta $\{(x,0)\colon \quad x \geq 0\}$.

---

3. **(3 pt.)** Podać definicję logarytmu liczby a przy podstawie b. Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?

(3 pt.) Wykazać (nie używając tablic, kalkulatorów, komputerów — kartka i pisadło wystarczą), że zachodzi nierówność $5\log 3 < 1 + 2\log 5 < 4\log 4$.

---

4. **(1 pt.)** Rozwiązać równanie: $\log(4x - 100) = \log(20 - 2x)$.

(3 pt.) Rozwiązać równanie: $\log(x^3 - 17x + 26) = 1 + \log(2 - x)$.

---

5. Niech $A = (4,8,9)$, $B = (4,8,25)$, $C = (1,2,3)$.

(3 pt.) Znaleźć wektory $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AB}$ oraz ich długości.

(3 pt.) Znaleźć kosinus największego z kątów trójkąta ABC.

(3 pt.) Znaleźć jakiś (niezerowy) wektor prostopadły do płaszczyzny ABC.

(2 pt.) Znaleźć pole trójkąta ABC.

(1 pt.) Znaleźć środek M_C odcinka AB.

(3 pt.) Znaleźć punkt X na odcinku CM_C, który dzieli ten odcinek w stosunku $2:1$, tzn. odległość punktu X od wierzchołka C ma być dwukrotnie większa od jego odległości od punktu M_C.

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $24^2 = 576$, $25^2 = 625$, $35^2 = 1225$, $36^2 = 1296$, $37^2 = 1369$, $38^2 = 1444$, $48^2 = 2304$, $49^2 = 2401$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$, $53^2 = 2809$, $54^2 = 2916$, $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$, $67^2 = 4489$, $666^2 = 443556$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.