

Matematyka A, kolokwium, 29 października 2007, 17:25 – 18:55

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (5 pt.) Niech $x \in [1, 5]$. Uprościć $|2x - 2| + |3 - x| + |5 - x|$. Są różne przypadki!

2. (2 pt.) Podać definicję sinusa dowolnego kąta $t > 0$.

(2 pt.) Rozwiązać równanie $2y^2 - 5y + 3 = 0$.

(3 pt.) Rozwiązać nierówność $8\sin^4 t - 10\sin^2 t + 3 > 0$.

(3 pt.) Na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ zaznaczyć łuki złożone z punktów, przez które przechodzi drugie ramie kąta spełniającego tę nierówność przy założeniu, że pierwszym ramieniem takiego kąta jest półprosta $\{(x, 0): x \geq 0\}$.

3. (3 pt.) Podać definicję logarytmu liczby a przy podstawie b . Jakie liczby wolno logarytmować i przy jakich podstawach?

(3 pt.) Wykazać (nie używając tablic, kalkulatorów, komputerów — kartka i pisadło wystarczą), że zachodzi nierówność $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} \log 3 > \log 7 > \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \log 2 + \frac{1}{4} \log 3$.

4. (1 pt.) Rozwiązać równanie: $\log(3x - 99) - \log(30 - x) = 1$.

(3 pt.) Rozwiązać równanie: $\log(2x^2 - 17x + 5) = 1 + \log(1 - 2x)$.

5. Niech $A = (16, 38, 55)$, $B = (-8, -10, -5)$, $C = (1, 2, 3)$.

(3 pt.) Znaleźć wektory \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{BA} i \overrightarrow{AB} oraz ich długości.

(3 pt.) Znaleźć kosinus największego z kątów trójkąta ABC .

6. Niech $A = (16, 38, 55)$, $B = (-8, -10, -5)$, $C = (1, 2, 3)$.

(3 pt.) Znaleźć jakiś (niezerowy) wektor prostopadły do płaszczyzny ABC .

(2 pt.) Znaleźć pole trójkąta ABC .

7. Niech $A = (16, 38, 55)$, $B = (-8, -10, -5)$, $C = (1, 2, 3)$.

(1 pt.) Znaleźć środek M_C odcinka AB .

(3 pt.) Znaleźć punkt X na odcinku CM_C , który dzieli ten odcinek w stosunku $2 : 1$, tzn. odległość punktu X od wierzchołka C ma być dwukrotnie większa od jego odległości od punktu M_C .

Ciekawostki (któż wie, co się może przydać): $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $24^2 = 576$, $25^2 = 625$, $35^2 = 1225$, $36^2 = 1296$, $37^2 = 1369$, $38^2 = 1444$, $48^2 = 2304$, $49^2 = 2401$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$, $53^2 = 2809$, $54^2 = 2916$, $64^2 = 4096$, $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$, $67^2 = 4489$, $666^2 = 443556$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.