Matematyka A, egzamin, 21 czerwca 2007, 12:30 – 15:45

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x styczna do wykresu funkcji f w punkcie $\big(x, f(x)\big)$ przecina oś OX w punkcie $\left(\frac{x}{2}, 0\right)$.

---

2. (a) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego $t^2x'(t) + tx(t) + 1 = 0$.

(b) Znaleźć rozwiązanie x spełniające warunek $x(-1) = 2$.

---

3. Znaleźć pole i środek masy jednorodnego obszaru $G = \{(x,y)\colon\ \ 1 - \frac{2}{\pi}x \le y \le \cos x,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\}$.

---

4. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) = -18te^{-2t} + 16te^{2t} - 20\sin(2t).$$

---

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań:
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 7y(t) - z(t), \\ y'(t) = -3x(t) + 3y(t) - 6z(t), \\ z'(t) = -5x(t) - 2y(t) + z(t). \end{cases}$$

Znaleźć rozwiązanie układu spełniające warunek $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ wiedząc, że

(1) jednym z pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy, która jest interesująca dla rozwiązujących ten układ równań jest liczba -6

(2) oraz że suma dwu pozostałych wartości własnych równa jest 12 a ich iloczyn 45.

---

6. Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f i lokalne ekstrema tej funkcji oraz wyjaśnić, które z nich są minimami, a które maksimami, jeśli $f(x,y) = x^4 - y^4 - 4xy^2 - 2x^2$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Wskazówka. W otoczeniu tego z punktów krytycznych, którego charakteru nie da się wyjaśnić za pomocą ogólnego twierdzenia, należy rozważyć f na dowolnie wybranej prostej przechodzącej przez kłopotliwy punkt oraz na paraboli $y^2 + x = 0$.

---

7. Niech $C = \{(x,y)\colon\ \ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 3x + y \le 7\}$ i $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Wiadomo, że $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3(x^2 + y^2 - 5)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6(xy - 2)$.

Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.

Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w zbiorze C lub wykazać, że funkcja nie przyjmuje którejś wartości ekstremalnej w tym zbiorze.
