Matematyka A, egzamin, 21 czerwca 2007, rozwiązania zadań

Był błąd w rozwiązaniu zadania 7. Wykrył go jeden ze studentów. Mogą tu być jeszcze inne błędy. W razie wątpliwości proszę o kontakt elektroniczny.

---

1. Prędkość wody wypływającej przez otwór w dnie naczynia jest równa $0{,}6\sqrt{2Gh}$, gdzie $G = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a h oznacza głębokość wody. Naczynie ma kształt walca o średnicy podstawy $2R = 1{,}8$ m. Otwór w dnie ma średnicę $2r = 6$ cm. Wysokość walca jest równa $H = 2{,}45$ m. Po jakim czasie cała woda wycieknie z walca? Zakładamy, że w chwili początkowej walec jest wypełniony w całości wodą.

Rozwiązanie. Niech $h(t)$ oznacza głębokość wody w naczyniu w chwili t. W szczególności $h(0) = 2,45$. W bardzo krótkim czasie Δt z naczynia wypłynie w przybliżeniu $0{,}6\sqrt{2Gh(t)}\cdot\Delta t\cdot\pi\cdot r^2$ wody. W wyniku tego poziom wody obniży się o $h(t) - h(t+\Delta t) \approx \frac{0{,}6\sqrt{2Gh(t)}\cdot\Delta t\cdot\pi\cdot r^2}{\pi\cdot R^2}$. Przybliżenie bierze się stąd, że prędkość wody w żadnym momencie nie jest stała. W granicy otrzymujemy

$$-h'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t)-h(t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{0{,}6\sqrt{2Gh(t)}\cdot\pi\cdot r^2}{\pi\cdot R^2} = 0{,}6\sqrt{2G}\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot\sqrt{h(t)} = \frac{\sqrt{5}}{750}\cdot\sqrt{h(t)}$$

— oczywiście do granicy przechodzimy po podzieleniu otrzymanej równości przybliżonej przez Δt, bo inaczej otrzymalibyśmy mało interesującą równość $0 = 0$. Mamy więc $\frac{h'(t)}{h(t)} = -\frac{\sqrt{5}}{750}$. Stąd $2\sqrt{h(t)} = \int\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}}\,dt = -\int\frac{\sqrt{5}}{750}\,dt = -\frac{\sqrt{5}}{750}t + C$, więc $h(t) = \left(\frac{C}{2} - \frac{\sqrt{5}}{1500}t\right)^2$. Stąd wynika, że $2{,}45 = h(0) = \left(\frac{C}{2}\right)^2$, więc $\frac{C}{2} = \sqrt{2{,}45}$. Oczywiście $h(t) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$t = \frac{1500}{\sqrt{5}}\cdot\frac{C}{2} = 750\cdot\sqrt{\frac{2{,}45}{5}} = 750\cdot\sqrt{0{,}49} = 750\cdot 0{,}7 = 525 \text{ s } = 8\tfrac{3}{4} \text{ min. } \blacksquare$$

---

2. (a) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego $(2t+1)x'(t) = 2x(t) + 4t$.

(b) Znaleźć rozwiązanie spełniające warunek $x(-1) = 0$. Znaleźć $\lim\limits_{t\to -1/2} x(t)$.

Rozwiązanie. Rozwiążemy najpierw równanie jednorodne $(2t+1)x'(t) = 2x(t)$. Mamy więc $\ln|x(t)| = \int\frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = \int\frac{2}{2t+1}\,dt = \ln|2t+1| + C_1$, gdzie C_1 oznacza pewną stałą. Z otrzymanej równości wynika od razu, że $x(t) = \pm e^{C_1}(2t+1) = C\cdot(2t+1)$. Uzmiennimy stałą C, czyli znajdziemy rozwiązanie równania $(2t+1)x'(t) = 2x(t) + 4t$ w postaci $x(t) = C(t)(2t+1)$, gdzie C oznacza nieznaną funkcję różniczkowalną. Po podstawieniu do równania otrzymujemy

$$C'(t)(2t+1)^2 + 2C(t)(2t+1) = 2C(t)(2t+1) + 4t,$$

więc $C'(t) = \frac{4t}{(2t+1)^2}$. Stąd wynika, że

$C(t) = \int\frac{4t}{(2t+1)^2}\,dt = \int\frac{4t+2}{(2t+1)^2}\,dt - \int\frac{2}{(2t+1)^2}\,dt = \int\frac{2}{2t+1}\,dt - \int\frac{2}{(2t+1)^2}\,dt = \ln|2t+1| + \frac{1}{2t+1} + c$. Wobec tego funkcja $(2t+1)\ln|2t+1| + 1 + c(2t+1)$ jest rozwiązaniem rozpatrywanego równania. Z równości $0 = x(-1) = (-2+1)\ln|-2+1| + 1 + c(-2+1) = 1 - c$ wynika, że $c = 1$. Wobec tego rozwiązaniem spełniającym warunek początkowy jest funkcja $(2t+1)\ln|2t+1| + 2t + 2$. Ponieważ $\lim_{s\to 0^+} s\ln s = 0$ — można to wywnioskować stosując regułę de l'Hospitala, więc

$$\lim_{t\to -1/2}\big((2t+1)\ln|2t+1| + 1 + c(2t+1)\big) = 1,$$

niezależnie od $c\in\mathbb{R}$. $\blacksquare$

---

3. Znaleźć objętość i środek masy jednorodnego obszaru $G = \{(x,y,z)\colon \quad x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1,\ x \ge 0\}$, czyli znaleźć środek masy odcinka $[0,1]$ zakładając, że gęstość masy w punkcie x, którą oznaczamy przez $\varrho(x)$, równa jest polu elipsy $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1 - x^2$.

Rozwiązanie. Pole elipsy $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1 - x^2$ jest równe

$$2 \cdot \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} \left(3\sqrt{1 - x^2 - y^2/4}\right) dy \xlongequal[dy=2\sqrt{1-x^2}\cos t\, dt]{y=2\sqrt{1-x^2}\sin t} 12\left(1-x^2\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 6\left(1-x^2\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt = 6\left(1-x^2\right)\left(t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 6\pi\left(1-x^2\right).$$

Środek masy znajduje się w punkcie $(x,0,0)$, co wynika z symetrii zbioru $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9} \le 1-x^2$ względem obu osi układu współrzędnych. Masa zbioru G, czyli jego objętość, jest równa całce

$$\int_0^1 6\pi(1-x^2)\, dx = 6\pi(x - \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 = 6\pi(1-\tfrac{1}{3}) = 4\pi .$$

W celu znalezienia środka masy należy znaleźć jeszcze całkę

$$\int_0^1 6\pi x(1-x^2)\, dx = 6\pi\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = 6\pi\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{3}{2}\pi .$$

Pierwsza współrzędna środka masy to iloraz $\frac{3\pi/2}{4\pi} = \frac{3}{8}$. Wobec tego środkiem masy zbioru G jest punkt $\left(\frac{3}{8},0,0\right)$. ■

---

4. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = (15t^2+6t)e^{2t} + (4t^2+6t-2)e^{-2t} + 10\cos t.$$

Rozwiązanie. Zaczniemy od równania jednorodnego $x''(t)+x'(t)-6x(t)=0$. Pierwiastkami równania charakterystycznego $\lambda^2+\lambda-6=0$ są liczby 2 i -3. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym jest funkcja $c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}$. Teraz zajmiemy się kolejno równaniami

$x''(t)+x'(t)-6x(t) = (15t^2+6t)e^{2t}$,

$x''(t)+x'(t)-6x(t) = (4t^2+6t-2)e^{-2t}$,

$x''(t)+x'(t)-6x(t) = 10\cos t$.

W pierwszym przypadku można znaleźć rozwiązanie w postaci $t(At^2+Bt+C)e^{2t}$ — następuje podwyższenie stopnia o 1, bo 2 jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. Podstawiając to wyrażenie do pierwszego równania otrzymujemy

$$(15t^2+6t)e^{2t} = \left((At^3+B^2t+Ct)e^{2t}\right)'' + \left((At^3+B^2t+Ct)e^{2t}\right)' - 6(At^3+B^2t+Ct)e^{2t} =$$
$$= \left(4At^3 + (12A+4B)t^2 + (6A+8B+4C)t + 2B+4C\right)e^{2t} +$$
$$+ \left(2At^3 + (3A+2B)t^2 + (2B+2C)t + C\right)e^{2t} - 6(At^3+B^2t+Ct)e^{2t} =$$
$$= \left(15At^2 + (6A+10B)t + 2B+5C\right)e^{2t}.$$

Ponieważ równość ma zachodzić dla wszystkich liczb rzeczywistych t, więc muszą zachodzić równości $15A=15$, $6A+10B=6$ i $2B+5C=0$, a to oznacza, że $A=1$ i $B=C=0$. Wobec tego funkcja t^3e^{2t} jest jednym z rozwiązań pierwszego równania.

Liczba -2 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, zatem drugie równanie ma rozwiązanie postaci $(At^2+Bt+C)e^{-2t}$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$$(4t^2+6t-2)e^{-2t} = \left(4At^2 + (-8A+4B)t + 2A-4B+4C\right)e^{-2t} +$$
$$+ \left(-2At^2 + (2A-2B)t + B-2C\right)e^{-2t} - 6(At^2+Bt+C)e^{-2t} =$$
$$= \left(-4At^2 - (6A+4B)t + (2A-3B-4C)\right)e^{-2t}.$$

Wobec tego $A=-1$, $6A+4B=-6$ i $2A-3B-4C=-2$, zatem $B=0=C$. Funkcja $-t^2e^{-2t}$ jest więc jednym z rozwiązań drugiego równania.

Rozwiązań trzeciego równania możemy szukać w postaci $A\cos t+B\sin t$, bo liczba i nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Moglibyśmy poszukiwać ich też w postaci zespolonej $ae^{it}+be^{-it}$, ale wolimy od razu w rzeczywistej; przypomnijmy tylko, że $\cos t=\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})$ oraz $\sin t=\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})$.

Podstawiając do równania otrzymujemy $10\cos t=(-A\cos t-B\sin t)+(-A\sin t+B\cos t)-6(A\cos t+B\sin t)=(-7A+B)\cos t+(-A-7B)\sin t$, zatem $10=-7A+B$ i $0=-A-7B$, czyli $A=-\frac{7}{5}$ i $B=\frac{1}{5}$, zatem funkcja $-\frac{7}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t$ jest jednym z rozwiązań trzeciego równania.

Stąd wynika, że rozwiązaniem ogólnym równania wyjściowego jest funkcja

$$t^3e^{2t}-t^2e^{-2t}-\tfrac{7}{5}\cos t+\tfrac{1}{5}\sin t+c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}.\blacksquare$$

---

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań:
$$\begin{cases} x'(t)=\ \ x(t)-y(t)-z(t),\\ y'(t)=\ \ x(t)+y(t),\\ z'(t)=3x(t)+z(t).\end{cases}$$

Znaleźć rozwiązanie układu spełniające warunek $x(0)=2$, $y(0)=0$, $z(0)=0$.

Rozwiązanie. Niech $M=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$. Równanie charakterystyczne macierzy M wygląda tak: $0=\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\1&1-\lambda&0\\3&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3+4(1-\lambda)=(1-\lambda)\big((1-\lambda)^2+4\big)$,

zatem wartościami własnymi macierzy M są liczby 1, $1+2i$ oraz $1-2i$. Współrzędne wektora własnego odpowiadającego wartości własnej 1 spełniają równania $v_1-v_2-v_3=v_1$, $v_1+v_2=v_2$ i $3v_1+v_3=v_3$, zatem $v_1=0$ i $v_2=-v_3$. Jednym z wektorów własnych jest wektor $\overrightarrow{(0,1,-1)}$. Współrzędne wektora własnego, który odpowiada wartości własnej $1+2i$ spełniają następujące równania $v_1-v_2-v_3=(1+2i)v_1$, $v_1+v_2=(1+2i)v_2$ i $3v_1+v_3=(1+2i)v_3$, zatem $v_1=2iv_2$ i $3v_1=2iv_3$. Spełnione są te równania np. przez współrzędne wektora $\overrightarrow{(2i,1,3)}$. Ponieważ $\overline{1+2i}=1-2i$ i wyrazy macierzy M są rzeczywiste, więc wartości własnej $1-2i$ odpowiada m.in. wektor własny $\overrightarrow{(-2i,1,3)}$. Rozwiązaniem ogólnym układu jest funkcja (o wartościach w $\mathbb{C}^3$)

$$c_1e^t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+c_2e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix}2i\\1\\3\end{pmatrix}+c_3e^{(1-2i)t}\begin{pmatrix}-2i\\1\\3\end{pmatrix}=c_1e^t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+(c_2+c_3)e^t\left[\cos(2t)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}-\sin(2t)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right]+$$
$$+(c_2-c_3)ie^t\left[\sin(2t)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+\cos(2t)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right].$$

W wersji rzeczywistej wygląda to tak

$$c_1e^t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\tilde c_2e^t\left[\cos(2t)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}-\sin(2t)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right]+\tilde c_3e^t\left[\sin(2t)\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+\cos(2t)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right].$$

Mamy jeszcze znaleźć rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy. Bez trudu stwierdzamy, że przyjmując $c_1=0$, $\tilde c_2=0$ i $\tilde c_3=1$ otrzymujemy poszukiwaną funkcję. $\blacksquare$

---

6. Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f i lokalne ekstrema tej funkcji oraz wyjaśnić, które

z nich są minimami, a które maksimami, jeśli $f(x,y)=16y^4-x^4-16x^2y-32y^2$ dla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Wskazówka. W otoczeniu tego z punktów krytycznych, którego charakteru nie da się wyjaśnić za pomocą ogólnego twierdzenia, rozważyć f na jednej z osi oraz na paraboli $4y+x^2=0$.

Rozwiązanie. Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-4x^3-32xy=-4x(x^2+8y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=64y^3-64y-16x^2$. Z równości $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ wynika więc, że $x=0$ lub $x^2=-8y$. Z równości $x=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ wynika, że $y=0$ lub $y=1$, lub $y=-1$. Z równości $x^2=-8y$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ wynika, że $64y^3+64y=0$, czyli że $y=0$, a więc również $x=0$.

Mamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-12x^2-32y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-32x$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=192y^2-64$. Wobec tego $D^2f(0,-1)=\begin{pmatrix}32 & 0\\ 0 & 128\end{pmatrix}$. Ta macierz jest dodatnio określona (kryterium Sylvestera), więc w punkcie $0,-1$ funkcja ma lokalne minimum właściwe, czyli w dostatecznie małym otoczeniu punktu $(0,-1)$ przyjmuje jedynie wartości większe niż w tym punkcie. Mamy też $D^2f(0,1)=\begin{pmatrix}-32 & 0\\ 0 & 128\end{pmatrix}$. Otrzymana macierz ma jedną ujemną wartość własną, -32 i jedną dodatnią 128. Wynika st6ądf, że w dowolnym otoczeniu punktu $(0,1)$ znajdują się punkty, w których funkcja przyjmuje zarówno wartości większe niż w tym punkcie jak i takie, w których wartości funkcji są mniejsze niż w tym punkcie, nie ma więc w tym punkcie lokalnego ekstremum. Dalej $D^2f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 64\end{pmatrix}$. Tym razem nie da się wywnioskować, czy funkcja ma w punkcie $(0,0)$ lokalne ekstremum z postaci drugiej różniczki, to zależy nie tylko od niej. Mamy jednak $f(x,0)=-x^4$, więc funkcja ograniczona do osi OX ma w punkcie 0 lokalne maksimum właściwe, a z tego wynika, że nie ma w tym punkcie lokalnego minimum (również niewłaściwego). $f(x,-\frac{x^2}{4})=\frac{x^8}{16}-x^4+4x^4-32\frac{x^4}{16}=\frac{x^8}{16}+x^4>0$ dla $x\neq 0$. Wykazaliśmy, że w punktach dowolnie bliskich punktowi $(0,0)$ funkcja przyjmuje wartości większe niż w punkcie $(0,0)$, a to oznacza, że w tym punkcie nie ma lokalnego maksimum (również niewłaściwego). Ponieważ nie ma ani lokalnego maksimum ani lokalnego minimum, więc funkcja f nie ma w tym punkcie lokalnego ekstremum. ■

---

7. Niech $C=\{(x,y)\colon\ \ -8\le x\le 4,\ |y|\le 4\}$ i $f(x,y)=x^3-27x+xy^2$.
Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.
Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w zbiorze C lub wykazać, że funkcja nie przyjmuje którejś wartości ekstremalnej w tym zbiorze.

Rozwiązanie. Mamy $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-27+y^2$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy$. Jeśli $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ to $x=0$ lub $y=0$. W pierwszym przypadku z równości $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ wynika, że $y=\pm 3\sqrt{3}$; w drugim z równości $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ wynika, że $x=\pm 3$. Mamy więc cztery punkty, w których gradient zeruje się: $(3,0)$, $(-3,0)$, $(0,-3\sqrt{3})$ i $(0,3\sqrt{3})$. Mamy też $D^2f(x,y)=\begin{pmatrix}6x & 2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$, zatem $D^2f(3,0)=\begin{pmatrix}18 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $D^2f(-3,0)=\begin{pmatrix}-18 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$, $D^2f(-3\sqrt{3},0)=\begin{pmatrix}0 & -6\sqrt{3}\\ -6\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$ oraz

$D^2 f(3\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 0 & 6\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z lokalnym minimum właściwym, a w drugim — z lokalnym maksimum właściwym, w trzecim i w czwartym z siodłami.

Ponieważ funkcja f jest ciągła, a zbiór C jest domknięty i ograniczony, więc funkcja f osiąga na nim wartość największą i wartość najmniejszą. Może przyjmować którąkolwiek z nich wewnątrz obszaru lub na jego brzegu. Ponieważ $3\sqrt{3} > 5 > 4$, więc punkty $(0,-3\sqrt{3})$ i $(0,3\sqrt{3})$ nie leżą w zbiorze C. Punkty $(3,0)$ i $(-3,0)$ leżą w zbiorze C. Mamy $f(3,0) = 3^3 - 27\cdot 3 = -2\cdot 27 = -54$, $f(-3,0) = -3^3 + 27\cdot 3 = 2\cdot 27 = 54$.

Teraz zajmiemy się brzegiem zbioru C. Mamy $f(-8,y) = -296 - 8y^2$. Jeśli $|y| \le 4$, to $-424 = = -296 - 8\cdot 16 \le f(-8,y) \le -296$. Jeśli $|y| \le 4$, to $-44 \le f(4,y) = -44 + 4y^2 \le -44 + 4\cdot 16 = 20$. Dalej $f(x,4) = f(x,-4) = x^3 - 11x$. Ponieważ $(x^3 - 11x)' = 3x^2 - 11$, więc na przedziale $\left[-8, -\sqrt{\frac{11}{3}}\right]$ funkcja $x^3 - 11x$ rośnie od wartości -424 do wartości $\frac{22}{9}\cdot\sqrt{33} < \frac{22}{9}\cdot 6 = \frac{44}{3} < 16$, na przedziale $\left[-\sqrt{\frac{11}{3}}, \sqrt{\frac{11}{3}}\right]$ — maleje od wartości $\frac{22}{9}\cdot\sqrt{33}$ do wartości $-\frac{22}{9}\cdot\sqrt{33} > -16$, a na przedziale $\left[\sqrt{\frac{11}{3}}, 4\right]$ rośnie od wartości $-\frac{22}{9}\cdot\sqrt{33}$ do wartości 20.

Wobec tego najmniejszą wartością funkcji f w zbiorze C jest -424, a największą — 54. ■