Matematyka A, egzamin, 21 czerwca 2007, 9:00 – 12:16

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Prędkość wody wypływającej przez otwór w dnie naczynia jest równa $0{,}6\sqrt{2Gh}$, gdzie $G = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a h oznacza głębokość wody. Naczynie ma kształt walca o średnicy podstawy $2R = 1{,}8$ m. Otwór w dnie ma średnicę $2r = 6$ cm. Wysokość walca jest równa $H = 2{,}45$ m. Po jakim czasie cała woda wycieknie z walca? Zakładamy, że w chwili początkowej walec jest wypełniony w całości wodą.

---

2. (a) Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego $(2t+1)x'(t) = 2x(t) + 4t$.

(b) Znaleźć rozwiązanie spełniające warunek $x(-1) = 0$. Znaleźć $\lim\limits_{t\to -1/2} x(t)$.

---

3. Znaleźć objętość i środek masy jednorodnego obszaru $G = \{(x,y,z)\colon \quad x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1,\ x \ge 0\}$, czyli znaleźć środek masy odcinka $[0,1]$ zakładając, że gęstość masy w punkcie x, którą oznaczamy przez $\varrho(x)$, równa jest polu elipsy $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1 - x^2$.

---

4. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = (15t^2 + 6t)e^{2t} + (4t^2 + 6t - 2)e^{-2t} + 10\cos t.$$

---

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu równań:

$$\begin{cases} x'(t) = \ \ x(t) - y(t) - z(t), \\ y'(t) = \ \ x(t) + y(t), \\ z'(t) = 3x(t) + z(t). \end{cases}$$

Znaleźć rozwiązanie układu spełniające warunek $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

---

6. Znaleźć punkty zerowania się gradientu funkcji f i lokalne ekstrema tej funkcji oraz wyjaśnić, które z nich są minimami, a które maksimami, jeśli $f(x,y) = 16y^4 - x^4 - 16x^2y - 32y^2$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wskazówka. W otoczeniu tego z punktów krytycznych, którego charakteru nie da się wyjaśnić za pomocą ogólnego twierdzenia, rozważyć f na jednej z osi oraz na paraboli $4y + x^2 = 0$.

---

7. Niech $C = \{(x,y)\colon \quad -8 \le x \le 4,\ |y| \le 4\}$ i $f(x,y) = x^3 - 27x + xy^2$.

Znaleźć lokalne ekstrema funkcji f.

Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f w zbiorze C lub wykazać, że funkcja nie przyjmuje którejś wartości ekstremalnej w tym zbiorze.
