

Matematyka A, kolokwium, 9 maja 2007, 15:40 – 17:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

1. Duży garnek świeżo ugotowanej zupy o temperaturze $100^{\circ}C$ chłodzony jest w bieżącej wodzie o temperaturze $5^{\circ}C$; zupa jest mieszana, więc można przyjąć, że jej temperatura jest taka sama we wszystkich punktach garnka. W ciągu 10 minut temperatura zupy obniżona została do $60^{\circ}C$. W jakim czasie garnek ostygnie do temperatury $20^{\circ}C$?

Wiadomo, że obowiązuje prawo stygnięcia Newtona: „szybkość zmniejszania się temperatury układu jest proporcjonalna do różnicy temperatur pomiędzy układem a otoczeniem.”

2. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego $x'(t) - 2x(t) = 4t^3e^{2t} + 8t \cos(2t)$
-

3. Znaleźć taką funkcję x zmiennej t , że $x'(t) \cos t - 2x \sin t = 1$ dla $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $x(0) = 1$.
-

4. Rozwiązać równanie $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 10e^t + 10e^{-t} + 10 \sin t$.
-

5. Znaleźć taką funkcję x zmiennej t , że $x'(0) = x(0) = 0$ oraz że dla każdej liczby t zachodzi równość $x''(t) + 16x(t) = 8 \cos(4t)$.
-

6. Rozwiązać układ równań:
- $$\begin{cases} x'(t) = -3x(t), \\ y'(t) = 5x(t) - 3y(t) - 5z(t), \\ z'(t) = -5x(t) + 2z(t). \end{cases}$$
-

7. Podać definicję zbioru otwartego w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Podać definicję gradientu funkcji $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Informacja o niektórych logarytmach: $\ln 2 \approx 0,6931$, $\ln 3 \approx 1,0986$, $\ln 4 \approx 1,3863$, $\ln 5 \approx 1,6094$, $\ln 6 \approx 1,7918$, $\ln 7 \approx 1,9459$, $\ln 8 \approx 2,0794$, $\ln 9 \approx 2,1972$, $\ln 10 \approx 2,3026$, $\ln 11 \approx 2,3979$, $\ln 12 \approx 2,4849$, $\ln 13 \approx 2,5649$, $\ln 14 \approx 2,6391$, $\ln 15 \approx 2,7081$, $\ln 16 \approx 2,7726$, $\ln 17 \approx 2,8332$, $\ln 18 \approx 2,8904$, $\ln 19 \approx 2,9444$, $\ln 20 \approx 2,9957$, $\ln 21 \approx 3,0445$, $\ln 22 \approx 3,0910$, $\ln 23 \approx 3,1360$.