Matematyka A, kolokwium, 21 marca 2007, 15:40 – 17:00

Poprawione literówki (niektóre?), 27 marca 2007; 14;30

1. Obliczyć $\int \big(x^3e^{-x^2}+\sin(2x)+\sin x\cos x\big)\,dx$.

Rozw. $\int \big(x^3e^{-x^2}\big)\,dx \overset{\text{przez}}{\underset{\text{części}}{=\!=}} -\frac12 x^2e^{-x^2}+\int\big(xe^{-x^2}\big)\,dx = -\frac12x^2e^{-x^2}-\frac12e^{-x^2}+C$, bowiem $\big(e^{-x^2}\big)'=-2xe^{-x^2}$. $\int\sin(2x)\,dx \overset{u=2x}{\underset{du=2\,dx}{=\!=}} \frac12\int\sin u\,du=-\frac12\cos u+C=-\frac12\cos(2x)+C$.

$\int(\sin x\cos x)\,dx \overset{u=\sin x}{\underset{du=\cos\,dx}{=\!=}} \int u\,du=\frac12u^2+C=\frac12\sin^2x+C$. Z tych trzech równości wynika od razu, że $\int\big(x^3e^{-x^2}+\sin(2x)+\sin x\cos x\big)\,dx=-\frac12x^2e^{-x^2}-\frac12e^{-x^2}-\frac12\cos(2x)+\frac12\sin^2x+C$.

Uwaga: $\sin(2x)=2\sin x\cos x$, więc jedną z całek obliczyliśmy dwukrotnie otrzymując różnie wyglądające wyniki. Dlaczego w rzeczywistości jest to ten sam rezultat?

---

2. Obliczyć $\int_0^\infty \frac{e^t}{e^{2t}+5e^t+6}\,dt$.

Rozw. $\int\frac{e^t}{e^{2t}+5e^t+6}\,dt \overset{x=e^t}{\underset{dx=e^t\,dt}{=\!=}} \int\frac{dx}{x^2+5x+6}=\int\big(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\big)\,dx=\ln|x+2|-\ln|x+3|+C=$
$=\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C=\ln\left|\frac{e^t+2}{e^t+3}\right|+C$, zatem $\int_0^\infty\frac{e^t}{e^{2t}+5e^t+6}\,dt=\lim_{t\to\infty}\ln\left|\frac{e^t+2}{e^t+3}\right|-\ln\frac34=\ln1-\ln\frac34=\ln\frac43$.

---

3. Obliczyć środek ciężkości jednorodnego obszaru, który jest ograniczony wykresami funkcji

$$f(x)=\cos\tfrac{\pi x}{2}\qquad\text{i}\qquad g(x)=1-x^2.$$

Rozw. Niech $\varphi(x)=f(x)-g(x)=\cos\frac{\pi x}{2}-1+x^2=x^2-2\sin^2\frac{\pi x}{4}$ (bo $\cos\alpha=\cos^2\frac\alpha2-\sin^2\frac\alpha2=$ $=1-2\sin^2\frac\alpha2$). Funkcja $x-\sqrt2\sin\frac{\pi x}{4}$ jest ściśle wypukła na przedziale $[0,1]$, jako suma funkcji liniowej (x) i ściśle wypukłej ($-\sqrt2\sin\frac{\pi x}{4}$). W obu końcach tego przedziału przyjmuje wartość 0. Wobec tego w przedziale $(0,1)$ jest ujemna. Tak samo jest oczywiście w przypadku funkcji φ na przedziale $(0,1)$ i dzięki jej parzystości również na przedziale $(-1,0)$. Wykazaliśmy, że na całym przedziale $[-1,1]$ z wyjątkiem punktów -1, 0, 1 funkcja $\cos\frac{\pi x}{2}$ przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja $1-x^2$. Obie te funkcje są dodatnie w przedziale $(-1,1)$. Ponieważ $(\sin t)'=\cos t$, więc $\int_{-1}^1\cos\frac{\pi x}{2}\,dx=\frac2\pi\big[\sin\frac\pi2-\sin\frac{-\pi}{2}\big]=\frac4\pi$. Mamy też $\int_{-1}^1(1-x^2)\,dx=(x-\frac13x^3)\big|_{-1}^1=\frac23-\big(-\frac23\big)=\frac43$.

Pole obszaru jest więc równe $\frac43-\frac4\pi=\frac{4(\pi-3)}{3\pi}$.

Dla obliczenia pierwszej współrzędnej środka ciężkości tego obszaru należy znaleźć całkę

$$\int_{-1}^1 x\big(1-x^2-\cos\tfrac{\pi x}{2}\big)\,dx,$$

ale tu nie trzeba nic robić, bo funkcja podcałkowa jest nieparzysta, więc całka z niej po przedziale symetrycznym względem 0 jest równa 0, zresztą ze względu na symetrię obszaru jasne jest, że środek masy leży na osi OY. Znajdziemy drugą współrzędną środka masy zbioru, którym jesteśmy zmuszeni interesować się. Środek masy odcinka o końcach $f(x)$ i $g(x)$ to punkt $\dfrac12\big(f(x)+g(x)\big)$, w nim skupiona jest masa $g(x)-f(x)$. Należy znaleźć „średnią ważoną”, czyli całkę:

$\int_{-1}^1\frac12\big(f(x)+g(x)\big)\big(g(x)-f(x)\big)\,dx=\frac12\int_{-1}^1\Big[(1-x^2)^2-\cos^2\frac{\pi x}{2}\Big]\,dx=$

$=\frac12\int_{-1}^1\big[1-2x^2+x^4-\frac12\big(\cos(\pi x)+1\big)\big]\,dx=\big[\frac x2-\frac13x^3+\frac1{10}x^5-\frac1{4\pi}\sin(\pi x)-\frac x4\big]\Big|_{-1}^1=\frac12-\frac23+\frac15=\frac1{30}$

i otrzymany wynik podzielić przez pole obszaru. Otrzymujemy $\frac{1/30}{4(\pi-3)/(3\pi)}=\frac{\pi}{40(\pi-3)}$. Wobec tego środkiem masy tego obszaru jest punkt $\left(0, \frac{\pi}{40(\pi-3)}\right)$.

---

4. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu łuku paraboli $y = 2x - x^2$, $0 \le x \le 2$ wokół osi OX.

Rozw. Pole przekroju płaskiego prostopadłego do osi OX, przechodzącego przez punkt $(x, 0, 0)$, czyli koła o promieniu $x(2-x)$, jest równe $\pi x^2(2-x)^2 = \pi(4x^2 - 4x^3 + x^4)$, zatem objętość jest równa $\int_0^2 \pi(4x^2 - 4x^3 + x^4)\,dx = \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]\Big|_0^2 = \pi\left[\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right] = \frac{16\pi}{15}$.

---

5. Znaleźć długość wykresu funkcji $y = \ln(x^2-1)$, gdzie $10 \le x \le 100$.

Rozw. Mamy $y' = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1}$, zatem długość wykresu tej funkcji jest równa

$$\int_{10}^{100} \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,dx = \int_{10}^{100} \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}\,dx = \int_{10}^{100} \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int_{10}^{100} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)dx =$$

$$= \int_{10}^{100} \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left(x + \ln|x-1| - \ln|x+1|\right)\Big|_{10}^{100} = 90 + \ln\frac{99}{9} - \ln\frac{101}{11} = 90 + \ln\frac{121}{101}.$$

---

6. Znaleźć wszystkie takie funkcje $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $tx'(t) - 2x(t) = 0$ i $x(0) = 0$ oraz wszystkie takie funkcje $y\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $ty'(t) - 2y(t) = 0$ i $y(1) = 1$.

Rozw. Mamy $0 = 0 \cdot x'(0) - x(0) = -x(0)$. Dla $t \ne 0 \ne x(t)$ możemy napisać $\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{2}{t}$. Całkując obie strony tej równości względem t otrzymujemy $\ln|x(t)| = 2\ln|t| + C = \ln t^2 + C$. Wynika stąd, że $|x(t)| = e^C \cdot t^2$, czyli $x(t) = \pm e^C \cdot t^2$. Funkcja x jako różniczkowalna jest ciągła, więc jej wartości mają taki sam znak na każdym przedziale, na którym nie przyjmuje ona wartości 0. Możemy więc napisać, że jeśli $tx' - 2x = 0$, to istnieją takie dwie liczby rzeczywiste c, d,* że

$$x(t) = \begin{cases} cx^2 & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0, \\ dx^2 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Jasne jest, że nie zależnie od wyboru liczb c, d otrzymujemy funkcję różniczkowalną w punkcie 0. Można dodać, że jest ona dwukrotnie różniczkowalna w punkcie 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $c = d$. Wszystko, co do tej pory powiedzieliśmy dotyczy zarówno funkcji x jak i funkcji y. Ponieważ $1 = y(1) = c \cdot 1^2 = c$, więc

$$y(t) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0, \\ dx^2 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

dla każdej liczby rzeczywistej d.

---

* e^C to dowolna liczba dodatnia, bo C oznacza dowolną liczbę rzeczywistą.