Egzamin z matematyki dla studentów chemii, 7 marca 2007, 17:00 – 19:15

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_p q$ pamiętając o założeniach o p i q. Wykazać, że $6\log_{10} 5 < 7\log_{10} 4 < 5\log_{10} 7$.

---

2. Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta. Rozwiązać nierówność: $2(1+\log_2\big(\cos\varphi)\big) > \log_2 3$. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2+y^2=1$.

---

3. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)^5(x-2)^2}$. Dla $x \neq 0, 2, \pm 1$ zachodzą równości

$$f'(x) = \frac{1}{3}(13x^3 - 22x^2 - 3x + 2)\cdot\sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x-2)}} \quad \text{i} \quad f''(x) = \frac{2\cdot(65x^6 - 220x^5 + 131x^4 + 140x^3 - 92x^2 - 4)}{9\cdot\sqrt[3]{x^5(x-2)^4(x^2-1)}}.$$

Wielomian $13x^3 - 22x^2 - 3x + 2$ ma trzy pierwiastki: $x_1 \approx -0{,}34$, $x_2 \approx 0{,}26$, $x_3 \approx 1{,}77$. Wielomian $65x^6 - 220x^5 + 131x^4 + 140x^3 - 92x^2 - 4$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste $x_4 \approx -0{,}78$, $x_5 \approx 0{,}68$, $x_6 \approx 1{,}47$ i $x_7 \approx 2{,}07$.

Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f jest różniczkowalna (tzn. ma skończoną pochodną I rzędu)?

Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

Obliczyć granice funkcji f przy $x \longrightarrow \pm\infty$, oraz granice f' w końcach przedziałów, na których funkcja f jest różniczkowalna.

Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Niech $A := \begin{pmatrix} 0 & 7 & -16 \\ 1 & -4 & 12 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Podać definicję wektora własnego i wartości własnej.

Obliczyć $A\cdot\vec{\mathbf{v}}$.

Znaleźć wyznacznik macierzy A, jej wartości własne (nierzeczywiste też) i odpowiadające im wektory własne.

Znaleźć macierze A^{-1} i A^T oraz ich wyznaczniki.

Znaleźć wszystkie (również nierzeczywiste) wartości i wektory własne macierzy A^2.

---

5. Niech $\mathbf{A} = (1,1,3)$, $\mathbf{B} = (4,1,1)$, $\mathbf{C} = (5,2,0)$, $\mathbf{O} = (0,0,0)$.

Znaleźć objętość czworościanu $\mathbf{OABC}$.

Znaleźć jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}} = \overrightarrow{[0,0,0]}$ prostopadły do płaszczyzny ABC.

Znaleźć pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkt $\mathbf{O}$, która jest równoległa do płaszczyzny $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć kosinus kąta między płaszczyzną $\mathbf{ABC}$ i osią OX.

---

6. Znaleźć ten z punktów leżących na paraboli $y = x^2$, który leży najbliżej punktu $(-3,10)$.

Informacje pożyteczne lub zbędne: $5^5 = 3125$, $5^7 = 78125$, $11 = 10+1$, $2^{15} = 32768$, $6^5 = 7776$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$ $(a+b)^2 = =a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.