Egzamin z matematyki dla studentów chemii, 8 lutego 2007, 10:10 – 12:45

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_p q$ pamiętając o założeniach o p i q.
Wykazać, że $6\log_{10}5 > 4\log_{10}11 > 9\log_{10}2 + \log_{10}27$.

---

2. Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta. Rozwiązać nierówność: $|\cos t + \sin t| < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. Niech $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^5(x^2-1)}$. Dla $x \neq -2, \pm 1$ zachodzą równości
$f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{2/3}(x^2-1)^{-2/3}(7x^2+4x-5)$ oraz
$f''(x) = \frac{2}{9}(x+2)^{-1/3}(x^2-1)^{-5/3}(14x^4+16x^3-27x^2-32x-7)$.
Wielomian $7x^2+4x-5$ ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{1}{7}(-2-\sqrt{39}) \approx -1{,}18$ i $x_2 = \frac{1}{7}(-2+\sqrt{39}) \approx 0{,}61$.
Wielomian $14x^4+16x^3-27x^2-32x-7$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste $x_3 \approx -1{,}57$, $x_4 \approx -0{,}70$, $x_5 \approx -0{,}31$ i $x_6 \approx 1{,}45$.

Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p i wyjaśnić, w jakich punktach funkcja f jest różniczkowalna (tzn. ma skończoną pochodną I rzędu)?

Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie.

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest wypukła, na których jest wklęsła.

Obliczyć granice funkcji f przy $x \longrightarrow \pm\infty$, oraz granice f' w końcach przedziałów, na których funkcja f jest różniczkowalna.

Znaleźć takie liczby a, b, że $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$, o ile istnieją lub wykazać, że takich liczb a, b nie ma.

Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Niech $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & -3 \\ -16 & 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Podać definicję wektora własnego i wartości własnej.

Obliczyć $A \cdot \vec{\mathbf{v}}$.

Znaleźć wyznacznik macierzy A, jej wartości własne (nierzeczywiste też) i odpowiadające im wektory własne.

Znaleźć macierze A^{-1} i A^T oraz ich wyznaczniki.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^2.

---

5. Niech $\mathbf{A} = (1,1,2)$, $\mathbf{B} = (9,1,1)$, $\mathbf{C} = (1,3,1)$, $\mathbf{O} = (0,0,0)$.

Znaleźć objętość czworościanu $\mathbf{OABC}$.

Znaleźć jakikolwiek wektor $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}} = \overrightarrow{[0,0,0]}$ prostopadły do płaszczyzny ABC.

Znaleźć pole trójkąta $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć równanie płaszczyzny $\mathbf{ABC}$.

Znaleźć kosinusy obu kątów utworzonych przez płaszczyznę $\mathbf{ABC}$ i płaszczyznę o równaniu $x+y+z=1$.

---

6. Znaleźć stożek o największej objętości spośród stożków wpisanych w kulę o promieniu 1.

Informacje pożyteczne lub zbędne: $5^5 = 3125$, $5^7 = 78125$, $11 = 10+1$, $2^{10} = 1024$, $6^5 = 7776$, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.