Kolokwium poprawkowe z matematyki dla studentów chemii, 8 lutego 2007

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_p q$ pamiętając o założeniach o p i q. Wykazać, że $6\log_{10} 5 > 4\log_{10} 11 > 9\log_{10} 2 + \log_{10} 27$.

---

2. Rozwiązać równanie: $2\log_4\left[\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})\right] = -1$. Zdefiniować sinus i kosinus kąta $\alpha > 0$. Zilustrować rozwiązanie tego równania na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. Niech $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Znaleźć $A^6 = A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A$ oraz $A^{-3} = A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A^{-1}$.

Znaleźć wartości własne macierzy A i macierzy A^{-3}.

---

4. Niech $A = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sprawdzić, że wektor $\vec{\mathbf{w}}$ jest wektorem własnym macierzy A. Jakiej wartości własnej on odpowiada?
Znaleźć pozostałe wartości i wektory własne macierzy A.
Wykazać, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}}$ zachodzi równość $\|A\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\|$.
Niech $\vec{\mathbf{v}}$ będzie wektorem prostopadłym do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Wykazać, że również wektor $A\vec{\mathbf{v}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Znaleźć kosinus kąta między wektorami $\vec{\mathbf{v}}$ i $A\vec{\mathbf{v}}$
Sprawdzić, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}}$ wektory $\vec{\mathbf{w}}$, $3\vec{\mathbf{x}} - (\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}$ i $\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$ są parami prostopadłe oraz że zachodzi równość $A\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{6}\left[2(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} + \left(3\vec{\mathbf{x}} - (\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}\right) - 3\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\right] = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} + \frac{1}{6}(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$.

W końcówce zadania można ewentualnie skorzystać z tego, że $A(\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2) = A\vec{\mathbf{x}}_1 + A\vec{\mathbf{x}}_2$ *oraz jeżeli* $P(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} + \frac{1}{6}(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$, *to* $P(\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2) = P(\vec{\mathbf{x}}_1) + P(\vec{\mathbf{x}}_2)$. *Wtedy wystarczy sprawdzić, że równość* $A\vec{\mathbf{x}} = P(\vec{\mathbf{x}})$ *ma miejsce dla trzech odpowiednio wybranych wektorów* $\vec{\mathbf{x}}$ *(jak je wybrać? — nie każda trójka jest dobra dla naszych celów).*

---

5. Niech $f(x) = \frac{3}{14}x^{14/3} - \frac{3}{11}x^{11/3} - \frac{9}{8}x^{8/3} + \frac{3}{5}x^{5/3} + 3x^{2/3}$.
Istnieją takie liczby $x_0 \in (1{,}56; 1{,}57)$, p, q, że $p^2 < 4q$ i dla każdego $x \neq 0$ zachodzą równości:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}} \qquad \text{oraz} \qquad f''(x) = \frac{11(x+1)(x-x_0)(x^2+px+q)}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

Funkcja f *nie ma asymptot.*

a. Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest rosnąca i przedziały, na których jest malejąca; przedziały, na których funkcja f jest wypukła i przedziały, na których jest wklęsła.

b. Znaleźć punkty, w których funkcja f nie ma pochodnej.

c. W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema?

d. Znaleźć punkty przegięcia funkcji f.

e. Znaleźć granice jednostronne funkcji f w $\pm\infty$.

f. Znaleźć granice jednostronne funkcji f' (pochodnej funkcji f) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

G. Naszkicować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.

---

6. Znaleźć wszystkie takie liczby $z \in \mathbb{C}$, dla których zachodzi równość $z^3 = -2 + 2i$. Zaznaczyć odpowiednie punkty na płaszczyźnie.

Kolokwium poprawkowe z matematyki dla studentów chemii, 8 lutego 2007, 13:15 – 14:15

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

7. Znaleźć liczby takie liczby a, b, c, d, że punkty $(-1, -9)$, $(1, -5)$, $(2, 0)$ i $(3, 23)$ leżą na wykresie funkcji $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

---

8. Rozwiązać równanie: $\frac{1}{2}\log(x + 11) + \log\frac{5x-10}{6} = 1$.

---

9. Obliczyć: $\left(\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\right)''$, $\left(e^{\operatorname{tg}(2x)}\right)'$. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ w punkcie $\left(4, \frac{4}{5}\right)$.

Kolokwium poprawkowe z matematyki dla studentów chemii, 8 lutego 2007, 13:15 – 14:15

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia .

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

10. Znaleźć liczby takie liczby a, b, c, d, że punkty $(-1, -9)$, $(1, -5)$, $(2, 0)$ i $(3, 23)$ leżą na wykresie funkcji $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

---

11. Rozwiązać równanie: $\frac{1}{2}\log(x + 11) + \log\frac{5x-10}{6} = 1$.

---

12. Obliczyć: $\left(\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\right)''$, $\left(e^{\operatorname{tg}(2x)}\right)'$. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ w punkcie $\left(4, \frac{4}{5}\right)$.
