

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby. Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca. Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach. *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

1. (1 pt.) Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji  $\sin x$  w punkcie  $p = 0$ .
  - (2 pt.) Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji  $\operatorname{tg} x$  w punkcie  $p = 0$ .
  - (1 pt.) Znaleźć pierwszy wielomian Taylora funkcji  $\sqrt{1+x}$  w punkcie  $p = 0$ .
  - (6 pt.) Znaleźć granicę  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - \sin x}}{\sqrt{1+x} - 1}$ .
- 
2. (5 pt.) Znaleźć taką liczbę  $a \in \mathbb{R}$ , że granica  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2} \left( \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{6 + 7x + 8x^2} - ax^2 \right)$  jest skończona oraz
    - (5 pt.) granicę  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{6 + 7x + 8x^2} - ax^2 - bx \right)$ .
- 
3. (5 pt.) Znaleźć najmniejszą taką liczbę  $L$ , że nierówność  $|\sqrt{9+x^2} - \sqrt{9+y^2}| \leq L|x-y|$  zachodzi dla wszystkich  $x, y \geq 4$ .
  - (5 pt.) Znaleźć największą taką liczbę  $\ell$ , że nierówność  $\ell|x-y| \leq |\sqrt{9+x^2} - \sqrt{9+y^2}|$  zachodzi dla wszystkich  $x, y \geq 4$ .
- 
4. Niech  $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x^2(x-12)^4}$ . Wiadomo, że  $f'(x) = (x-8)(3x-4)\sqrt[3]{\frac{x-12}{x}}$  dla  $x \neq 0$  oraz
 
$$f''(x) = \frac{2(x-4)(3x^2-32x-16)}{\sqrt[3]{x^4(x-12)^2}} \text{ dla } x \notin \{0, 12\}$$
    - (3 pt.) Czy istnieją  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  i  $f''(12)$ ? Odpowiedź należy uzasadnić.
    - (4 pt.) Znaleźć przedziały, na których funkcja  $f$  jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca i wszystkie lokalne ekstrema funkcji  $f$ .
    - (4 pt.) Znaleźć przedziały, na których funkcja  $f$  jest ściśle wypukła, na których jest ściśle wklęsła i wszystkie punkty przegięcia funkcji  $f$ .
    - (4 pt.) Korzystając z uzyskanych rezultatów naszkicować wykres funkcji  $f$ .
- 
5. Niech  $f(x) = x[1 + \ln(2+x) - \ln 2] - (x+1)\ln(x+1)$ .
    - (1 pt.) Obliczyć  $f(0)$ .
    - (3 pt.) Obliczyć  $f'(x)$ .
    - (6 pt.) Udowodnić, że dla dowolnej liczby  $x > 0$  zachodzi nierówność
 
$$x[1 - \ln 2 + \ln(1+x)] > (x+1)\ln(x+1).$$

#### Ciekawostki

kolejnymi pochodnymi funkcji tangens w punkcie 0 są liczby: 1, 0, 2, 0, 16, 0, 272, ...

kolejnymi pochodnymi funkcji sinus w punkcie 0 są liczby: 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...

kolejnymi pochodnymi funkcji  $\ln$  w punkcie 1 są liczby: 1, -1, 2, -6, 24, -120, 720, ...

kolejnymi pochodnymi funkcji  $x^a$  w punkcie 1 są liczby:  $a$ ,  $a(a-1)$ ,  $a(a-1)(a-2)$ ,  $\dots$