Klasówka, matematyka A, 9 stycznia 2007

1. Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie p.
Obliczyć $f'(x)$, jeśli $f(x)=\sqrt{1+\cos(2x)}$. W jakich punktach funkcja f nie ma pochodnej?
Podać definicję stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\big(p,f(p)\big)$.
Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji f w punktach $\big(0,\sqrt{2}\big)^*$ i $\big(\frac{\pi}{4};f(\frac{\pi}{4})\big)$.

Rozwiązanie. Pochodną funkcji f w punkcie p nazywamy granicę $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$. Oznaczamy ją symbolem $f'(p)$. Stosując znane wzory stwierdzamy, że

$$f'(x)=\big(\sqrt{1+\cos(2x)}\big)'=\big([1+\cos(2x)]^{1/2}\big)'=\tfrac{1}{2}[1+\cos(2x)]^{-1/2}\cdot\big[-2\sin(2x)\big]=-\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+\cos(2x)}}.$$

Wzór ten działa zawsze wtedy, gdy $1+\cos(2x)\neq 0$, czyli gdy $\cos(2x)\neq -1$, czyli gdy nie istnieje taka liczba całkowita n, że $2x=(2n+1)\pi$. Załóżmy więc, że $p=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ dla pewnej liczby całkowitej n. Mamy

$$f'\big((2n+1)\tfrac{\pi}{2}\big)=f'(p)=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos([2n+1]\pi+2h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(2h)}}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2 h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|\sin h|\sqrt{2}}{h}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$, więc granica $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|\sin h|\sqrt{2}}{h}$ nie istnieje, bowiem

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|\sin h|\sqrt{2}}{h}=-\lim_{h\to 0^-}\frac{\sin h\sqrt{2}}{h}=-\sqrt{2}\neq\sqrt{2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|\sin h|\sqrt{2}}{h}.$$

Wykazaliśmy więc, że w punktach postaci $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$, funkcja f nie ma pochodnej, a w pozostałych ma.

Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $\big(p,f(p)\big)$ nazywamy prostą, która przechodzi przez ten punkt i której współczynnik kierunkowy równy jest $f'(p)$. Jeśli pochodna w punkcie p równa jest $+\infty$ lub $-\infty$ i funkcja f jest ciągła w punkcie p, to styczną w punkcie $\big(p,f(p)\big)$ jest prosta pionowa przechodząca przez ten punkt, czyli prosta o równaniu $x=p$.

Mamy $f'(0)=-\frac{\sin(2\cdot 0)}{\sqrt{1+\cos(2\cdot 0)}}=0$, więc styczna do wykresu funkcji f w pierwszym z interesujących nas punktów, czyli w punkcie $\big(0,f(0)\big)=\big(0,\sqrt{2}\big)$ ma równanie $y=\sqrt{2}$.

Z równości $f'\big(\frac{\pi}{4}\big)=-\frac{\sin(\pi/2)}{\sqrt{1+\cos(\pi/2)}}=-1$ wynika, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie $\big(\frac{\pi}{4},f(\frac{\pi}{4})\big)=\big(\frac{\pi}{4},1\big)$ ma równanie postaci $y=-x+b$. Z równości $1=-\frac{\pi}{4}+b$ wynika, że $b=1+\frac{\pi}{4}$. Poszukiwane równanie to $y=-x+1+\frac{\pi}{4}$. ■

2. Znaleźć stożek o najmniejszej objętości spośród wszystkich stożków opisanych na kuli o promieniu 1.
Stożek jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy jego powierzchnia boczna i podstawa są styczne do kuli.

Rozwiązanie. Niech r oznacza promień podstawy stożka opisanego na kuli o promieniu 1, a h — jego wysokość. Narysujmy przekrój osiowy stożka i kuli, więc zawierający jego oś (wysokość). Otrzymujemy trójkąt równoramienny opisany na okręgu o promieniu 1, którego podstawą jest odcinek o długości $2r$, a wysokość prostopadła do tej podstawy równa jest h. Poprowadźmy promień okręgu wpisanego do punktu styczności z ramieniem. Na rysunku mamy dwa trójkąty prostokątne podobne: o przyprostokątnych r, h i o przyprostokątnych 1, $\sqrt{(h-1)^2-1^2}=\sqrt{h^2-2h}$. Z podobieństwa tych trójkątów wynika, że $\frac{h}{r}=\frac{\sqrt{h^2-2h}}{1}$, a stąd wnioskujemy, że $r=\frac{h}{\sqrt{h^2-2h}}$. Wobec tego objętość

---

* W tekście oryginalnym był punkt $(0,2)$, który nie leży na wykresie funkcji f, co nie ma sensu i było ogłoszone w czasie kolokwium.

V tego stożka równa jest $\frac{\pi}{3}\cdot r^2h=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{h^3}{h^2-2h}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{h^2}{h-2}=\frac{\pi}{3}\big[h+2+\frac{4}{h-2}\big]=\frac{\pi}{3}\big[h+2+4\,(h-2)^{-1}\big]$.
Stąd wynika, że $V'(h)=\frac{\pi}{3}\big[1-4\,(h-2)^{-2}\big]=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(h-2)^2=4$ i $h>2$, co ma miejsce wyłącznie dla $h=4$. Ponieważ pochodna V' nie przyjmuje wartości 0 w przedziale $(2,4)$, więc ma we wszystkich punktach tego przedziału taki sam znak. $V'(3)=-\pi$, więc jest na tym przedziale ujemna. Dla $h>4$ mamy $V'(h)>0$, bo np. $V'(6)=\frac{\pi}{4}>0$. Wynika stąd, że na przedziale $(2,4]$ funkcja V maleje, a na półprostej $[4,\infty)$ — rośnie. Wobec tego liczba $V(4)=\frac{8\pi}{3}$ jest najmniejszą wartością funkcji V. Stożkiem o najmniejszej objętości jest zatem stożek o wysokości 4 i promieniu podstawy $\frac{4}{\sqrt{4^2-2\cdot4}}=\sqrt{2}$. ■

3. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x(3-x^2)}$. Wiadomo, że wtedy $f'(x)=x^{-2/3}(3-x^2)^{-2/3}(1-x^2)$ oraz $f''(x)=-2(1+x^2)(3-x^2)^{-5/3}x^{-5/3}$.*

Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest ściśle rosnąca, na których jest ściśle malejąca, na których jest ściśle wypukła i na których jest ściśle wklęsła.

Znaleźć wszystkie te punkty p, w których funkcja f nie ma pochodnej. Znaleźć jednostronne granice $\lim\limits_{x\to p^{\pm}}f'(x)$ tej pochodnej w tych punktach p, w których ona nie istnieje.

Naszkicować wykres funkcji uwzględniając wyniki wszystkich obliczeń.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona na całej prostej, zeruje się w trzech punktach: 0, $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$. Wyrażenie $x^{-2/3}(3-x^2)^{-2/3}=\big[x^{-1/3}(3-x^2)^{-1/3}\big]^2$ jest **dodatnie** dla $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$. Wobec tego pochodna jest dodatnia na każdym z przedziałów $(-1,0)$, $(0,1)$, więc funkcja jest ściśle rosnąca na każdym z przedziałów $[-1,0]$, $[0,1]$, a więc również na przedziale $[-1,1]$. W taki sam sposób stwierdzamy, że jest ściśle malejąca na każdej z półprostych $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$. Bez trudu obliczamy granice: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\infty$, $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(-\sqrt{3}+h)-f(-\sqrt{3})}{h}=-\infty$ i $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\sqrt{3}+h)-f(\sqrt{3})}{h}=-\infty$.
Oznacza to, że w punktach $-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$ pochodna jest nieskończona, a ponieważ funkcja jest ciągła, więc styczna do wykresu funkcji w odpowiadających im punktach jest pionowa. W punkcie 1 funkcja ma lokalne maksimum, a w punkcie -1 — lokalne minimum.

Jeśli ktoś napisał, że pochodnej w tych trzech nie ma i z jego uzasadnienia wynika, że jest, ale nieskończona, to nie straci punktów, jeśli znajdzie granice pochodnej w tych punktach (są one nieskończone, równe znalezionym wartościom pochodnej, co zresztą wynika z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej).

Druga pochodna jest niezdefiniowana w punktach, w których pierwsza pochodna jest nieskończona, tzn. w punktach $-\sqrt{3}$, 0 i $\sqrt{3}$. Bez trudu stwierdzamy, że $f''(x)>0$ dla $x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ oraz $f''(x)<0$ dla $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$. Wynika stąd, że funkcja jest ściśle wypukła na każdym z przedziałów $[-\sqrt{3},0]$, $[\sqrt{3},+\infty)$ oraz ściśle wklęsła na — $(-\infty,-\sqrt{3}]$, $[0,\sqrt{3}]$. Punkty $-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$ to punkty przegięcia funkcji f (zmienia się w nich typ wypukłości, istnieje pochodna).

Na koniec wypada stwierdzić (choć w zadaniu nie było takiego polecenia), że $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$.

Zebrane informacje pozwalają narysować wykres funkcji f w miarę dokładnie. ■

4. Znaleźć wszystkie takie liczby λ, dla których istnieje taki wektor $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{\mathbf{v}}\neq\mathbf{0}$, że $A\vec{\mathbf{v}}=\lambda\vec{\mathbf{v}}$, jeśli

* W sformułowaniu zadania we wzorze na f' było $(3-x)^{-2/3}$, zamiast $(3-x^2)^{-2/3}$, co nie miało wielkiego wpływu na badanie funkcji i zostało po pewnym czasie zauważone i ogłoszone. Brakowało też znaku $-$ we wzorze na drugą pochodną, co nie zostało zauważone w czasie egzaminu, a brak tego minusa ma ogromny wpływ na badanie wypukłości i później na rysowanie wykresu. Zostanie to wzięte pod uwagę przy ocenianiu tego zadania.

(i) $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$; (ii) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1\\ -3 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Dla każdej ze **znalezionych** liczb λ opisać zbiór tych wektorów $\vec{\mathbf{v}}$, dla których zachodzi równość $A\vec{\mathbf{v}}=\lambda\vec{\mathbf{v}}$, tzn. spełniony jest układ równań: (i) $\begin{cases} 5x-2y+4z=\lambda x\\ -2x \qquad -2z=\lambda y\\ -2x+\ y-\ z=\lambda z\end{cases}$; (ii) $\begin{cases} 5x+2y-\ z=\lambda x\\ -3x \qquad -2z=\lambda y\\ 3x+\ y+\ z=\lambda z\end{cases}$.

Rozwiązanie. Wypada zacząć od stwierdzenia, że układy zostały napisane źle. Powinny wyglądać tak:

(i) $\begin{cases} 5x-2y+4z=\lambda x\\ 2x \qquad +2z=\lambda y\\ -2x+\ y-\ z=\lambda z\end{cases}$; (ii) $\begin{cases} 5x+2y-z=\lambda x\\ -3x \qquad +z=\lambda y\\ 3x+2y+z=\lambda z\end{cases}$.

Rozwiążemy najpierw te układy, które powinny były pojawić się, a potem powiemy coś o tych, które pojawiły się. Jest oczywiste, że niezależnie od wyboru λ wektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ jest rozwiązaniem obu układów równań. Warunkiem koniecznym istnienia niezerowego rozwiązania jest więc zerowanie się wyznaczników układów równań:

(i) $\begin{cases} (5-\lambda)x-2y \qquad +4z=0\\ 2x-\lambda y \qquad +2z=0\\ -2x+\ y-(1+\lambda)z=0\end{cases}$; (ii) $\begin{cases} (5-\lambda)x+2y \qquad -\ z=0\\ -3x-\lambda y \qquad -2z=0\\ 3x+\ y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$.

Zaczniemy od pierwszego układu, tzn. (i). Rozwiążemy równanie $0=\begin{vmatrix} (5-\lambda) & -2 & 4\\ 2 & -\lambda & 2\\ -2 & 1 & -(1+\lambda)\end{vmatrix}=$
$=-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=-(\lambda-2)(\lambda-1)^2$, zatem jedynymi liczbami λ, dla których istnieje niezerowe rozwiązanie układu (i) są 2 i 1.

Teraz opiszemy zbiór rozwiązań układu równań w przypadku $\lambda=2$. Układ przyjmuje postać

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=0\\ 2x-2y+2z=0\\ -2x+\ y-3z=0\end{cases}.$$

Odejmujemy drugie równanie od pierwszego, drugie podzielone stronami przez 2 dodajemy do trzeciego i dzielimy drugie stronami przez 2: $\begin{cases} x \qquad +2z=0\\ x-y+\ z=0\\ -x \qquad -2z=0\end{cases}$. Widać od razu, że ten układ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $x=-2z$ i $y=x+z=-2z+z=-z$, czyli przez wektory postaci $\begin{pmatrix}-2z\\-z\\z\end{pmatrix}$ dla $z\in\mathbb{R}$. Leżą one na jednej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, czyli tworzą jednowymiarową przestrzeń liniową.

Kolej na $\lambda=1$. Układ przyjmuje postać

$$\begin{cases} 4x-2y+4z=0\\ 2x\ -y+2z=0\\ -2x+\ y-2z=0\end{cases}.$$

Widać od razu, że po podzieleniu pierwszego równania przez 2 otrzymujemy równanie drugiego, a po pomnożeniu trzeciego równania przez -1 też otrzymujemy drugie równanie. Oznacza to, że wszystkie trzy równania są równoważne. Wobec tego zbiór rozwiązań składa się ze wszystkich wektorów postaci $\begin{pmatrix}x\\2x+2z\\z\end{pmatrix}$, gdzie $x,z\in\mathbb{R}$. Tworzą one płaszczyznę przechodzącą przez początek układu współrzędnych, czyli dwuwymiarową przestrzeń liniową.

Rozważmy teraz zgodnie z obietnicą układy $\begin{cases} 5x-2y+4z=2x \\ -2x \qquad -2z=2y \\ -2x+\ y-\ z=2z \end{cases}$ i $\begin{cases} 5x-2y+4z=x \\ -2x \qquad -2z=y \\ -2x+\ y-\ z=z \end{cases}$,

czyli układy $\begin{cases} 3x-2y+4z=0 \\ -2x-2y-2z=0 \\ -2x+\ y-3z=0 \end{cases}$ i $\begin{cases} 4x-2y+4z=0 \\ -2x\ -y-2z=0 \\ -2x+\ y-2z=0 \end{cases}$.

Pierwszy jest równoważny układowi $\begin{cases} -x \qquad -2z=0 \\ -6x \qquad -8z=0 \\ -2x+y-3z=0 \end{cases}$ — dodałem trzecie równanie pomnożone przez 2 do pierwszych dwóch. Z pierwszych dwóch równań wynika natychmiast, że $x=z=0$, a stąd i z trzeciego równania wynika, że $y=0$. Jedynym rozwiązaniem tego układu jest wektor zerowy. Rozwiążemy drugi układ. Do do drugiego równania dodajemy trzecie, a do pierwszego — trzecie pomnożone przez 2: $\begin{cases} 0=0 \\ -4x \qquad -4z=0 \\ -2x+\ y-2z=0 \end{cases}$. Widać więc, że rozwiązaniem tego układu jest dowolny wektor postaci $\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $z\in\mathbb{R}$.

Teraz zajmiemy się drugą macierzą, czyli układem (ii). Zaczniemy od układu, który powinien był się pojawić: $\begin{cases} 5x+2y-z=\lambda x \\ -3x \qquad +z=\lambda y \\ 3x+2y+z=\lambda z \end{cases}$ równoważnego układowi $\begin{cases} (5-\lambda)x+2y \qquad -z=0 \\ -3x-\lambda y \qquad +z=0 \\ 3x+2y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$.

Aby istniało niezerowe rozwiązanie musi, być spełniona równość $0=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ -3 & -\lambda & 1 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$ $=-\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+8=(2-\lambda)^3$. Jedynym pierwiastkiem tego równania jest liczba 2. Należy jeszcze opisać rozwiązania układu $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ -3x-2y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$. Jasne jest, że wszystkie trzy równania są równoważne. Oznacza to, że rozwiązania są wektorami postaci $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x+2y \end{pmatrix}$, gdzie $x,y\in\mathbb{R}$. Zbiór rozwiązań w tym przypadku to płaszczyzna przechodząca przez początek układu współrzędnych, czyli dwuwymiarowa przestrzeń liniowa.

Jeszcze pozostał błędny układ: $\begin{cases} 5x+2y-\ z=2x \\ -3x \qquad -2z=2y \\ 3x+\ y+\ z=2z \end{cases}$, czyli $\begin{cases} 3x+2y-\ z=0 \\ -3x-2y-2z=0 \\ 3x+\ y-\ z=0 \end{cases}$. Odejmując trzecie równanie od pierwszego stwierdzamy, że $y=0$. Dodając dwa pierwsze równania stwierdzamy, że $z=0$. Z tego, że $y=z=0$ wynika, że $x=0$, zatem jedynym rozwiązaniem tego układu jest wektor zerowy. ∎

5. Znaleźć A^{-1}, jeśli $A=$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (i) Niech $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mają być spełnione równości:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot A=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli $a+3b=1$, $2a+4b=0$, $c+3d=0$, $2c+4d=1$. Z tych równości wynika natychmiast, że $a=-2b$, więc $1=a+3b=-2b+3b=b$, zatem $a=-2$. Analogicznie $c=-3d$, więc

$1 = 2c+4d = -6d+4d = -2d$, zatem $d = -\frac{1}{2}$ i wobec tego $c = \frac{3}{2}$. Mamy więc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Oczywiście można też skorzystać z wzorów Cramera, ale macierz jest tak prosta, że można ograniczyć się jedynie do definicji macierzy odwrotnej.

(ii) Niech $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ u & v & w \end{pmatrix}$. Wtedy $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ u & v & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tzn. $1 = a$, $0 = a - b$, $0 = a + 2b + c$. Stąd $a = 1$, $b = 1$ i $c = -3$. Dalej $0 = \alpha$, $1 = \alpha - \beta$ i $0 = \alpha + 2\beta + \gamma$, zatem $\alpha = 0$, $\beta = -1$ i $\gamma = 2$. Wreszcie $0 = u$, $0 = u - v$ i $1 = u + 2v + w$, więc $u = w = 0$ i $w = 1$.

Z tych obliczeń wynika, że $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Można też zastosować np. wzór Cramera, co jest o tyle łatwe, że $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, co widzimy od razu, bo pod przekątną są same zera. ■

6. Znaleźć wszystkie takie liczby $z \in \mathbb{C}$, że $z^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$ i zaznaczyć je na płaszczyźnie.

Rozwiązanie. Mamy $\left|z^4\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 8 \cdot \sqrt{1+3} = 16$, zatem prawdziwy jest wzór $-8 - 8i\sqrt{3} = 16\left[-\frac{8}{16} - i\frac{8\sqrt{3}}{16}\right] = 16\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$. Z niego wynika, że
$z = 2\left[\cos\frac{4\pi}{3\cdot 4} + i\sin\frac{4\pi}{3\cdot 4}\right] = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 1 + i\sqrt{3}$ lub
$z = 2\left[\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{4})\right] = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] \cdot \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = \left[1 + i\sqrt{3}\right] \cdot i = -\sqrt{3} + i$, lub
$z = \left[1 + i\sqrt{3}\right] \cdot i^2 = -1 - i\sqrt{3}$, lub
$z = \left[1 + i\sqrt{3}\right] \cdot i^3 = \sqrt{3} - i$.
Znalezione cztery wartości z leżą na okręgu o środku w punkcie 0, o promieniu 2, są wierzchołkami kwadratu.

inf. *Informacje przeróżne (przydatne albo i nie):*
$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $i^3 = -i$.