

Klasówka 2, matematyka A, 13 grudnia 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 90 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

1. Niech $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Znaleźć macierz $B = A \cdot A^T$ i $\det(B)$.

Znaleźć punkty $\mathbf{p}_1 = B\vec{e}_1$, $\mathbf{p}_2 = B\vec{e}_2$, $\mathbf{p}_3 = B\vec{e}_3$.

Znaleźć objętość czworościanu o wierzchołkach $\mathbf{0}$, \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 i \mathbf{p}_3 .

2. Niech $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Znaleźć macierz C^{-1} .

3. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 2x + 2y + z = 2, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Wolno skorzystać z wyników uzyskanych w którymś z poprzednich zadań, jeśli się uda.

4. Znaleźć $f'(x)$, jeśli $f(x) = \sin(2\sqrt{3x^2 - x + 1} - 3)$.

Znaleźć $g'(x)$ oraz $g'(0)$, jeżeli $g(0) = 0$ i $g(x) = x^2 \cos(e^{1/x})$ dla $x \neq 0$.

5. Wykazać, że dla każdej liczby $x > 0$ zachodzi nierówność $6xe^{x^2} + \sin x > 7x$ oraz że istnieje liczba $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ taka, że jeśli $0 < x < \delta$, to $6xe^{x^2} + \sin x < 7,1x$.

6. W Grodzie Kaczym, na rogu prostopadłych ulic Kaczora Wielkiego i Kaczora Wspaniałego stoi budynek w kształcie prostopadłościanu. Ściana budynku równoległa do ulicy Kaczora Wielkiego ma 64 m długości a ściana równoległa do ulicy Kaczora Wspaniałego ma 27 m długości. Pozostałe ściany graniczą z ogromnym, betonowym placem. Kaczka Dziwaczka idzie nad rzeczkę najpierw trawnikiem ulicą Kaczora Wielkiego, a potem ma skręcić w ulicę Kaczora Wspaniałego. Musi jednak przejść obok tego wielkiego budynku, by uiścić opłatę klimatyczną w kasie, która jest ulokowana we wzmiankowym budynku, w jego rogu od strony betonowego placu tj. tym, który nie sąsiaduje z żadną z ulic. Jest już zmęczona, więc chce skrócić drogę idąc przez plac. W jakiej odległości od skrzyżowania powinna wejść Kaczka Dziwaczka na betonowy plac, by idąc **prosto**, przez betonowy plac przejść po nim jak najkrótszy odcinek nie omijając kasy?

Należy zakładać, że trawniki na obu ulicach są prostoliniowe i sąsiadują ze ścianami narożnego domu oraz że obie ulice są bardzo długie.

Może warto coś narysować.