Klasówka, matematyka A, 31 października 2006

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 90 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Wynik np. w postaci $\sqrt{88510464+194^2}$ **jest równie dobry, jak w postaci** 9410

---

1. (1.1) Zdefiniować $\log_d c$ pamiętając o założeniach o c i d.

(1.2) Rozwiązać równanie: $\log\frac{x+5}{5}+\log\frac{x-2}{2}+\log\frac{x-3}{3}=\log\sqrt[6]{64}$.

(1.3) Wykazać, że $5\log 3 < 1+2\log 5 < 4\log 4$.

2. Rozwiązać równanie: $\log_3\left[\operatorname{tg}(\varphi+\frac{\pi}{6})\right]=\frac{1}{2}$.
Zilustrować rozwiązanie tego równania na okręgu $x^2+y^2=1$.

3. Podać definicję sinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność: $\sin t+\cos t<1$.
Zilustrować rozwiązanie tej nierówności na okręgu $x^2+y^2=1$.

4. Niech $A=(-3,-3)$, $B=(5,-1)$, $C=(1,5)$. Znaleźć środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i pole tego trójkąta. Wyjaśnić, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

5. Obliczyć $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\2&4&-1&-1\\-1&0&-3&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\2&4&-1&-1\\-1&0&-3&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

Obliczyć wyznaczniki $\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&4&-1\\-1&0&-3\end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{vmatrix}$.

6. (6.1) Niech $\vec{\mathbf{u}}=\begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix}$ i $\vec{\mathbf{v}}=\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$. Znaleźć współrzędne wektora $\vec{\mathbf{w}}:=\frac{1}{9}\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{v}}$.

Znaleźć długości $\|\vec{\mathbf{u}}\|$ i $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ wektorów $\vec{\mathbf{u}}$ i $\vec{\mathbf{v}}$.

(6.2) Znaleźć kosinusy obu kątów, które tworzą płaszczyzny o równaniach:
$6x+6y+3z=15$ i $x+4y+8z=13$.

(6.3) Niech $A=(1,1,1)$, $B=A+\frac{1}{3}\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{w}}$, $C=A+\frac{1}{3}\vec{\mathbf{u}}\times\vec{\mathbf{w}}+\frac{1}{3}\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}}$, $D=A+\frac{1}{3}\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}}$.
Znaleźć pole czworokąta $ABCD$ i jego środek symetrii, jeśli ten czworokąt jest środkowosymetryczny.

inf. *Informacje przeróżne (przydatne albo i nie):*
$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $14^2=196$, $15^2=225$, $16^2=256$, $17^2=289$,
$2^7=128$, $2^{10}=1024$, $2^{12}=4096$, $2^{20}=1048576$, $3^4=81$, $3^8=6561$, $3^{13}=1594323$.