# Egzamin, matematyka A, 13 września 2006

*Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.*

*Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.*

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!**

*Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

**1.** Niech $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{w}} = \frac{1}{5}\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, Niech $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

(i) Znaleźć $M\vec{\mathbf{u}}$, $M\vec{\mathbf{v}}$, $M\vec{\mathbf{w}}$. Napisać równanie płaszczyzny $P$, która przechodzi przez punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$ i która jest prostopadła do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Wykazać, że jeśli wektor $\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$, to również wektor $M\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do $\vec{\mathbf{w}}$.

(ii) Znaleźć liczby $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że $M\vec{\mathbf{u}} = \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{v}}$.

(ii) Znaleźć wszystkie wartości własne (rzeczywiste lub zespolone) i wektory własne macierzy $M$.

(iii) Wykazać, że macierz $M$ ma macierz odwrotną i znaleźć wartości i wektory własne macierzy $M^{-1}$.

(iv) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $M^2$.

---

**2.** Znaleźć część rzeczywistą, część urojoną, wartość bezwzględną i argument wszystkich tych liczb zespolonych $z$, dla których $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$. Znaleźć $z^6$ dla każdej z nich.

---

**3.** Obliczyć $\int_0^\infty \left[x^3 - x^2\right] e^{-3\cdot x}\, dx$.

---

**4.** Naszkicować obszar $A = \{(x,y)\colon \quad 0 \le x \le y \le 4x(4-x)\}$ i znaleźć jego środek masy przyjmując, że jest on jednorodny.

---

**5.** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(3)}(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) = 0$.

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x^{(3)}(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) = 6te^{-2t} + 25\cos t$.

---

**6.** Niech $f(x,y) = 6x^2 + 4xy + 9y^2 - 20x - 40y$ i niech $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad 0 \le x \text{ i } 0 \le y \text{ i } x + y \le 4\}$.

(a) Znaleźć wszystkie lokalne ekstrema funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, jeśli funkcja $f$ ma najmniejszą wartość lub wykazać, że nie ma ona najmniejszej wartości.

(c) Wykazać, że funkcja $f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$ ma największą wartość i znaleźć tę liczbę.

---

*Wzory, których część może się przydać:*

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\quad \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$,

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\quad \operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$,

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$, $\sqrt{7} \approx 2{,}6458$, $\sqrt{17} \approx 4{,}1231$, $\sqrt{37} \approx 6{,}0828$, $\sqrt{71} \approx 8{,}4262$, $\sqrt{73} \approx 8{,}5440$, $\sqrt{137} \approx 11{,}7047$, $\sqrt{713} \approx 26{,}7021$.