Egzamin, matematyka A, 29 czerwca 2006, rozwiązania

1. Niech $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & -13 & 13 \end{pmatrix}$.

(i) Znaleźć $M\vec{\mathbf{v}}$, $M\vec{\mathbf{w}}$ i $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$. Napisać równanie płaszczyzny P, która przechodzi przez punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$ i która jest prostopadła do wektora $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$. Wykazać, że jeśli wektor $\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, to również wektor $M\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$.

$$M\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0\cdot 4 + 5\cdot 5 + 0\cdot 4 \\ 0\cdot 4 + 0\cdot 5 + 5\cdot 4 \\ 5\cdot 4 + (-13)\cdot 5 + 13\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}, \ M\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-3) + 5\cdot 0 + 0\cdot 3 \\ 0\cdot(-3) + 0\cdot 0 + 5\cdot 3 \\ 5\cdot(-3) + (-13)\cdot 0 + 13\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix},$$

$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 - 0\cdot 4 \\ -[4\cdot 3 - 4\cdot(-3)] \\ 4\cdot 0 - 5\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -24 \\ 15 \end{pmatrix}$, równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ ma więc postać $15x - 24y + 15z = 15\cdot 0 - 24\cdot 0 + 15\cdot 0 = 0$, czyli $5x - 8y + 5z = 0$. Jeśli wektor $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, to $5x - 8y + 5z = 0$ (wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny równy jest 0). Wtedy $M \cdot \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 5y \\ 5z \\ 5x - 13y + 13z \end{pmatrix}$. Z równości $5\cdot 5y - 8\cdot 5z + 5(5x - 13y + 13z) = 5(5y - 8z + 5x - 13y + 13z) = 5(5x - 8y + 5z) = 0$ wynika, że wektor $M\cdot\vec{\mathbf{x}}$ też jest prostopadły do wektora $\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, więc również do wektora $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$.

(ii) Znaleźć liczby $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takie, że $M\vec{\mathbf{v}} = \alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}}$ i $M\vec{\mathbf{w}} = \gamma\vec{\mathbf{v}} + \delta\vec{\mathbf{w}}$.

Trzeba rozwiązać dwa układy równań: $\begin{cases} 4\alpha - 3\beta = 25; \\ 5\alpha + 0\beta = 20; \\ 4\alpha + 3\beta = 7; \end{cases}$ oraz $\begin{cases} 4\gamma - 3\delta = 0; \\ 5\gamma + 0\delta = 15; \\ 4\gamma + 3\delta = 24. \end{cases}$ Można to zrobić bez trudu i stwierdzić, że $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 3$ i $\delta = 4$.

(iii) Znaleźć wartości własne (rzeczywiste lub zespolone) i wektory własne macierzy M.

W celu znalezienia wartości własnych macierzy M znajdziemy jej wielomian charakterystyczny:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 5 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 5 \\ 5 & -13 & 13-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 5 \\ -13 & 13-\lambda \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 13-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 65\lambda + 125 =$$

$=(5-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 25) = (5-\lambda)[(\lambda-4)^2 + 9]$. Wartościami własnymi są więc liczby 5, $4-3i$, $4+3i$. Znajdziemy wektory własne odpowiadające liczbie 5. Należy rozwiązać układ równań: $\begin{cases} 0x + 5y + 0z = 5x; \\ 0x + 0y + 5z = 5y; \\ 5x - 13y + 13z = 5z. \end{cases}$ Widać od razu, że (x,y,z) jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$. Oznacza to, że wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej 5 są wektory postaci $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$, $x \neq 0$. Niech $\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Teraz zajmiemy się wartością własną $4+3i$. Trzeba rozwiązać układ równań $\begin{cases} 0x + 5y + 0z = (4+3i)x; \\ 0x + 0y + 5z = (4+3i)y; \\ 5x - 13y + 13z = (4+3i)z. \end{cases}$ Bez kłopotu stwierdzamy, że (x,y,z) jest rozwiązaniem tego układu wtedy i tylko wtedy, gdy $y = \frac{4+3i}{5}x$, $z = \frac{4+3i}{5}y = \frac{7+24i}{25}x$. Przykładem takiej trójki jest $(4-3i, 5, 4+3i)$. Inne można otrzymać mnożąc tę przez dowolną liczbę $\neq 0$. Niech $\vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 4-3i \\ 5 \\ 4+3i \end{pmatrix}$. Ponieważ macierz jest rzeczywista i $4-3i = \overline{4+3i}$, więc wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $4-3i$ jest np. wektor $\vec{\mathbf{u}}_3 = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \\ 4-3i \end{pmatrix}$

(iv) Wykazać, że macierz M ma macierz odwrotną i znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^{-1}.

Liczba 0 nie jest wartością własną macierzy M, zatem wyznacznik macierzy M (czyli iloczyn jej wszystkich wartości własnych) jest różny od 0. Stąd wynika, że M ma macierz odwrotną

M^{-1}. Równość $M\vec{\mathbf{u}}_1 = 5\vec{\mathbf{u}}_1$ jest oczywiście równoważna temu, że $\vec{\mathbf{u}}_1 = M^{-1}5\vec{\mathbf{u}}_1 = 5M^{-1}\vec{\mathbf{u}}_1$, czyli $\frac{1}{5}\vec{\mathbf{u}}_1 = M^{-1}\vec{\mathbf{u}}_1$, a to oznacza, że $\frac{1}{5}$ jest wartością własną macierzy M^{-1}, a wektor $\vec{\mathbf{u}}_1$ jest jednym z odpowiadających jej wektorów własnych. Pozostałe są postaci $t\vec{\mathbf{u}}_1$, $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. W taki sam sposób można uzasadnić, że liczby $\frac{1}{4+3i} = \frac{4-3i}{5}$ oraz $\frac{1}{4+3i} = \frac{4+3i}{5}$ są wartościami własnymi, którym odpowiadają wektory własne $\vec{\mathbf{u}}_2$ i $\vec{\mathbf{u}}_3$.

(v) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^2.

Mamy $M\vec{\mathbf{u}}_1 = 5\vec{\mathbf{u}}_1$, zatem $M^2\vec{\mathbf{u}}_1 = M \cdot M \cdot \vec{\mathbf{u}}_1 = M \cdot 5\vec{\mathbf{u}}_1 = 5M\vec{\mathbf{u}}_1 = 5 \cdot 5\vec{\mathbf{u}}_1 = 5^2\vec{\mathbf{u}}_1$, zatem $5^2 = 25$ jest wartością własną macierzy M, której odpowiada wektor $\vec{\mathbf{u}}_1$. Analogicznie możemy przekonać się, że liczby $(4+3i)^2 = 7+24i$ oraz $(4-3i)^2 = 7-24i$ są wartościami własnymi macierzy M^2, którym odpowiadają wektory $\vec{\mathbf{u}}_2$ i $\vec{\mathbf{u}}_3$.

---

2. Znaleźć część rzeczywistą, część urojoną i argument wszystkich tych liczb zespolonych z, dla których $z^8 + z^4 + 1 = 0$. Znaleźć z^{2006} dla tej z nich, która jest położona najbliżej liczby $1 + \frac{i}{2}$.

Mamy $0 = z^8 + z^4 + 1 = (z^4 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, więc $z^4 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $z^4 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ lub $z^4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$. Z równości $z^4 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ wynika, że $z = \cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ lub $z = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{4}) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $z = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ lub $z = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{4}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Z równości $z^4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ wynika, że $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $z = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ lub $z = \cos(\frac{\pi}{3} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \pi) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $z = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. Znaleźliśmy więc osiem pierwiastków równania ósmego stopnia, czyli wszystkie. Wszystkie one leżą ona okręgu o środku w punkcie 0 i promieniu 1. Najbliżej punktu $1 + \frac{i}{2}$ znajduje się $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Mamy $\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{2006} = \left(\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]\right)^6\Big)^{334} \cdot \left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]^2 =$

$$= \left(\cos\pi + i\sin\pi\right)^{334} \cdot \left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = (-1)^{334}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

— zastosowaliśmy kilkakrotnie wzór de Moivre'a. Na deser:

$\mathrm{Re}\left(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\mathrm{Im}\left(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})\right) = \mathrm{Im}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq \frac{i}{2}$,

$\mathrm{Arg}\left(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})\right) = \mathrm{Arg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$, oczywiście do argumentu można dodać dowolną całkowitą wielokrotność liczby 2π.

Uwaga: $\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{4}) = [\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}] \cdot [\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}] = [\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}] \cdot [0 + i \cdot 1] = i[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}] = i[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

---

3. Wiedząc, że $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, obliczyć $\int_0^\infty x^2 e^{-(x-1)^2}\,dx$.

W treści tego zadania znalazł się błąd, miałoby być $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-(x-1)^2}\,dx$. Z parzystości funkcji e^{-x^2} wynika, że $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, dowód tej równości był pokazany na wykładzie. Mamy $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-(x-1)^2}\,dx \xlongequal[dy=dx]{y=x-1} \int_{-\infty}^\infty (y+1)^2 e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-y^2}\,dy + \int_{-\infty}^\infty 2ye^{-y^2}\,dy + \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-y^2}\,dy + \int_{-\infty}^\infty 2ye^{-y^2}\,dy + \sqrt{\pi}$. Należy więc znaleźć $\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-y^2}\,dy$ oraz $\int_{-\infty}^\infty 2ye^{-y^2}\,dy$. Mamy $\int 2ye^{-y^2}\,dy \xlongequal[dz=2y\,dy]{z=y^2} \int e^{-z}\,dz = -e^{-z} + \mathrm{const} = -e^{-y^2} + \mathrm{const}$. $\int_{-\infty}^\infty 2ye^{-y^2}\,dy = \lim\limits_{m\to\infty} \int_m^m 2ye^{-y^2}\,dy = \lim\limits_{m\to\infty}\left[e^{-m^2} - e^{-(-m)^2}\right] = 0$. Dalej $\int y^2 e^{-y^2}\,dy \xlongequal[\text{części}]{\text{przez}} -\frac{1}{2}y \cdot e^{-y^2} + \frac{1}{2}\int e^{-y^2}\,dy$, zatem $\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-y^2}\,dy = \lim\limits_{m\to\infty} \int_m^m y^2 e^{-y^2}\,dy = \lim\limits_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{2}y \cdot e^{-y^2}\Big|_{-m}^m + \frac{1}{2}\int_{-m}^m e^{-y^2}\,dy\right] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + 0 + \sqrt{\pi} = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}$.

---

4. Naszkicować obszar $A = \{(x,y)\colon \quad 0 \le x \le 1 \quad \text{i} \quad x^2 \le y \le 11x^2\}$ i znaleźć jego środek masy przyjmując, że jest on jednorodny.

Zaczniemy od znalezienia pola obszaru A. $\text{pole}(A) = \int_0^1 [11x^2 - x^2]\,dx = \int_0^1 10x^2\,dx = \frac{10}{3}\cdot\left[1^3 - 0^3\right] = \frac{10}{3}$. Środek masy jednorodnego odcinka o końcach (x, x^2) i $(x, 11x^2)$ to punkt $(x, 6x^2)$. Skupiona w nim masa to $11x^2 - x^2 = 10x^2$. Należy więc znaleźć całki $\int_0^1 [x\cdot 10x^2]\,dx$ i $\int_0^1 [6x^2\cdot 10x^2]\,dx$ i podzielić każdą z nich przez pole obszaru, w wyniku otrzymamy kolejno pierwszą i drugą współrzędną środka masy obszaru A. Mamy $\int_0^1 [x\cdot 10x^2]\,dx = \frac{10}{4}\left[1^4 - 0^4\right] = \frac{5}{2}$ oraz $\int_0^1 [6x^2\cdot 10x^2]\,dx = \frac{60}{5}\left[1^5 - 0^5\right] = 12$, zatem środek masy obszaru A to punkt $\frac{3}{10}\left(\frac{5}{2}, 12\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{18}{5}\right)$.

---

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 6te^{-2t} + 25\cos t$.

Zaczniemy od równania jednorodnego $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0$. Jego równanie charakterystyczne to $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ ma jeden pierwiastek podwójny: -2. Wobec tego rozwiązanie ogólne równania jednorodnego to $c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$. Teraz znajdziemy rozwiązania szczególne równań

$$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 6te^{-2t} \qquad \text{i} \qquad x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 25\cos t.$$

W pierwszym przypadku prawa strona jest quasi–wielomianem stopnia 1 z wykładnikiem -2. Ponieważ -2 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, więc istnieje rozwiązanie będące quasi–wielomianem stopnia $1+2=3$ z wykładnikiem -2, więc postaci $(a+bt+ct^2+dt^3)e^{-2t}$. Ze względu na to, jak wygląda rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, można znaleźć rozwiązanie postaci $(ct^2+dt^3)e^{-2t}$. Mamy $\left[(ct^2+dt^3)e^{-2t}\right]' = 2cte^{-2t} + (-2c+3d)t^2e^{-2t} - 2de^{-2t}$ i wobec tego $\left[(ct^2+dt^3)e^{-2t}\right]'' = \left[2cte^{-2t} + (-2c+3d)t^2e^{-2t} - 2de^{-2t}\right]' = 2ce^{-2t} + (6d-8c)te^{-2t} + (4c-12d)t^2e^{-2t} + 4dt^3e^{-2t}$. Podstawiając otrzymane wielkości do równania $x''(t)+4x'(t)+4x(t) = 6te^{-2t}$ otrzymujemy $6te^{-2t} = 2ce^{-2t} + (6d-8c)te^{-2t} + (4c-12d)t^2e^{-2t} + 4dt^3e^{-2t} + 4\cdot\left\{2cte^{-2t} + (-2c+3d)t^2e^{-2t} - 2de^{-2t}\right\} + 4\cdot(ct^2+dt^3)e^{-2t} = (2c+6dt)e^{-2t}$. Dla każdej liczby t musi więc być spełniona równość $6t = 2c+6dt$, a to oznacza, że $c=0$ i $d=1$. Rozwiązaniem szczególnym jest t^3e^{-2t}.

Teraz zajmiemy się równaniem $x''(t)+4x'(t)+4x(t) = 25\cos t = \text{Re}\left[25e^{it}\right]$. Liczba i nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. Funkcja $25e^{it}$ jest quasi–wielomianem stopnia 0 z wykładnikiem i. Istnieje więc rozwiązanie postaci $A\cos t + B\sin t$. Podstawiamy do równania i otrzymujemy $25\cos t = -A\cos t - B\sin t + 4\left[-A\sin t + B\cos t\right] + 4\left[A\cos t + B\sin t\right] = (3A+4B)\cos t + (3B-4A)\sin t$. Ponieważ równość ma być spełniona dla wszystkich liczb t, więc $3A+4B=25$ i $3B-4A=0$. Stąd $A=3$ i $B=4$. Rozwiązaniem szczególnym jest $3\cos t + 4\sin t$.

Wobec tego rozwiązaniem ogólnym równania $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 6te^{-2t} + 25\cos t$ jest funkcja $t^3e^{-2t} + 3\cos t + 4\sin t + c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$, gdzie c_1, c_2 oznaczają dowolne liczby (rzeczywiste lub zespolone w zależności od naszych zainteresowań).

---

6. Niech $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 2y^3 - 3x^2 + 3xy - 3y^2$ i niech $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \quad |x|\le 2, |y|\le 2\}$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f oraz wszystkie lokalne ekstrema w zbiorze Q. Można ewentualnie skorzystać z równości

$\frac{\partial f}{\partial x} = \quad 6x^2 - 6xy - 3y^2 - 6x + 3y,$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 - 6xy + 6y^2 + 3x - 6y.$

Zbiór Q to kwadrat, którego wierzchołkami są punkty $(2,2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$ i $(2,-2)$. Jest on domknięty i ograniczony (zatem zwarty) i wobec tego funkcja ciągła f przyjmuje w jakimś punkcie tego zbioru swą największą wartość i w jakimś punkcie swą najmniejszą wartość. Jeśli punkt, w którym przyjmowana jest wartość ekstremalna znajduje się wewnątrz kwadratu, to obie pochodne cząstkowe muszą być równe 0, jeśli znajduje się wewnątrz pionowego odcinka brzegu, to musi być spełniona równość $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, jeśli wewnątrz poziomego odcinka, to musi być spełniona równość $\frac{\partial f}{\partial x}=0$. Znajdziemy wszystkie punkty, które spełniają co najmniej jeden z wymienionych warunków.

Jeśli $\frac{\partial f}{\partial y}=-3x^2-6xy+6y^2+3x-6y=0$ i $\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2-6xy-3y^2-6x+3y=0$, to po odjęciu stronami otrzymujemy $0=9x^2-9y^2-9x+9y=9(x-y)(x+y-1)$. Jeśli $x=y$, to $0=6x^2-6x\cdot x-3x^2-6x+3x=-3x^2-3x$, zatem $x=0$ lub $x=-1$. Mamy więc dwa punkty, $(0,0)$ i $(-1,-1)$, podejrzane o to, że funkcja może przyjmować w którymś z nich swą największą lub najmniejszą wartość lub przynajmniej lokalnie największą lub lokalnie najmniejszą. Jeśli $x+y=1$, to $y=1-x$ i $0=6x^2-6x\cdot(1-x)-3(1-x)^2-6x+3(1-x)=9x^2-9x$, zatem $x=0$ lub $x=1$. Są więc następne dwa punkty, $(0,1)$ i $(1,0)$ podejrzane o to samo, co dwa znalezione poprzednio. Mamy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x-6y-6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-6x-6y+3$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6x+12y-6$. Wobec tego $D^2f(0,0)=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -6\end{pmatrix}$, $D^2f(-1,-1)=\begin{pmatrix}-12 & 15\\ 15 & -12\end{pmatrix}$, $D^2f(0,1)=\begin{pmatrix}-12 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$, $D^2f(1,0)=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & -12\end{pmatrix}$. Ponieważ macierze są symetryczne, więc ich wartości własne są rzeczywiste. Wyznacznik pierwszej macierzy jest dodatni, wiec ma ona dwie wartości własne rzeczywiste tego samego znaku. Mamy więc do czynienia z ekstremum lokalnym. Pozostałe trzy macierze mają wyznaczniki ujemne, więc mają po dwie wartości rzeczywiste różnych znaków. Wobec tego te trzy punkty to siodła: w kierunku wektora własnego odpowiadającego dodatniej wartości własnej funkcja ma lokalne minimum, a w kierunku wektora własnego odpowiadającego wartości własne ujemnej — lokalne maksimum (po obcięciu funkcji do prostej własnej!). Bez trudu sprawdzamy, np. kryterium Sylestera, że macierz $-D^2f(0,0)=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ jest dodatnio określona, zatem macierz $D^2f(0,0)$ jest określona ujemnie, więc w punkcie $(0,0)$ funkcja f ma maksimum lokalne właściwe.

Zajmiemy się teraz poziomymi częściami brzegu. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,2)=6x^2-12x-12-6x+6=6(x^2-3x-1)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\frac12(3-\sqrt{13})$, drugi pierwiastek równania kwadratowego, $\frac12(3+\sqrt{13})>3$ leży poza przedziałem $(-2,2)$, więc nie jest interesujący z punktu widzenia tego zadania. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-2)=$ $=6x^2+12x-12-6x-6=6(x^2+x-3)=0$, zatem $x=\frac12(-1+\sqrt{13})$, bo $\frac12(-1-\sqrt{13})<-2$. Wobec tego na odcinkach poziomych wartości ekstremalne mogą być osiągane w punkcie $\big(\frac12(3-\sqrt{13}),2\big)$ oraz w punkcie $\big(\frac12(-1+\sqrt{13}),-2\big)$.

Ponieważ $f(x,y)=f(y,x)$, więc na odcinkach pionowych wartości ekstremalne mogą być osiągane w punkcie $\big(2,\frac12(3-\sqrt{13})\big)$ oraz w punkcie $\big(-2,\frac12(-1+\sqrt{13})\big)$.

W grę wchodzą też wierzchołki kwadratu.

Mamy $f(0,0)=0$, $f\big(\frac12(3-\sqrt{13}),2\big)=f\big(2,\frac12(3-\sqrt{13})\big)=\frac12(-37+13\sqrt{13})$ — można to obliczyć bez żadnych sztuczek, a można skorzystać z tego, że liczba $x=\frac12(3-\sqrt{13})$ jest pierwiastkiem równania kwadratowego $x^2-3x-1=0$, czyli $x^2=3x+1=\frac12(3-3\sqrt{13})+1=\frac12(11-3\sqrt{13})$ i $x^3=x\cdot x^2=x(3x+1)=3x^2+x=3(3x+1)+x=10x+3=10\cdot\frac12(3-\sqrt{13})+3=18-5\sqrt{13}$, co niewątpliwie upraszcza obliczenia.

$f\big(\frac12(-1+\sqrt{13}),-2\big)=f\big(-2,\frac12(-1+\sqrt{13})\big)=-\frac12(37+13\sqrt{13})$. Mamy też $f(2,2)=-28$, $f(-2,2)=-36$, $f(-2,-2)=4$ i $f(2,-2)=-36$.

Ponieważ $\sqrt{13}>3$, więc $-\frac12(37+13\sqrt{13})<-\frac12(37+13\cdot 3)=-38$. Ponieważ $\sqrt{13}>3{,}5$, więc

$\frac{1}{2}(-37+13\sqrt{13}) > \frac{1}{2}(-37+13\cdot 3{,}5) = \frac{1}{2}\cdot 8{,}5 > 4$. Stąd wnioskujemy, że największą wartością funkcji jest liczba $f\big(\frac{1}{2}(3-\sqrt{13}),2\big) = f\big(2,\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})\big) = \frac{1}{2}(-37+13\sqrt{13})$, a wartością najmniejszą — liczba $f\big(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}),-2\big) = f\big(-2,\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13})\big) = -\frac{1}{2}(37+13\sqrt{13})$.

Wzory, których część może się przydać:

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$,

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$,

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$, $\sqrt{7} \approx 2{,}6458$, $\sqrt{17} \approx 4{,}1231$, $\sqrt{37} \approx 6{,}0828$, $\sqrt{71} \approx 8{,}4262$, $\sqrt{73} \approx 8{,}5440$, $\sqrt{137} \approx 11{,}7047$, $\sqrt{713} \approx 26{,}7021$.