Egzamin, matematyka A, 29 czerwca 2006

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & -13 & 13 \end{pmatrix}$.

(i) Znaleźć $M\vec{\mathbf{v}}$, $M\vec{\mathbf{w}}$ i $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$. Napisać równanie płaszczyzny P, która przechodzi przez punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$ i która jest prostopadła do wektora $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$. Wykazać, że jeśli wektor $\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, to również wektor $M\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$.

(ii) Znaleźć liczby $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takie, że $M\vec{\mathbf{v}} = \alpha\vec{\mathbf{v}} + \beta\vec{\mathbf{w}}$ i $M\vec{\mathbf{w}} = \gamma\vec{\mathbf{v}} + \delta\vec{\mathbf{w}}$.

(ii) Znaleźć wartości własne (rzeczywiste lub zespolone) i wektory własne macierzy M.

(iii) Wykazać, że macierz M ma macierz odwrotną i znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^{-1}.

(iv) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^2.

---

2. Znaleźć część rzeczywistą, część urojoną i argument wszystkich tych liczb zespolonych z, dla których $z^8 + z^4 + 1 = 0$. Znaleźć z^{2006} dla tej z nich, która jest położona najbliżej liczby $1 + \frac{i}{2}$.

---

3. Wiedząc, że $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, obliczyć $\int_0^\infty x^2 e^{-(x-1)^2}\,dx$.

---

4. Naszkicować obszar $A = \{(x,y)\colon \quad 0 \le x \le 1 \quad \text{i} \quad x^2 \le y \le 11x^2\}$ i znaleźć jego środek masy przyjmując, że jest on jednorodny.

---

5. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 6te^{-2t} + 25\cos t$.

6. Niech $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 2y^3 - 3x^2 + 3xy - 3y^2$ i niech $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \quad |x| \le 2, |y| \le 2\}$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f oraz wszystkie lokalne ekstrema w zbiorze Q. Można ewentualnie skorzystać z równości

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6xy - 3y^2 - 6x + 3y\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 - 6xy + 6y^2 + 3x - 6y\,.$$

Wzory, których część może się przydać:

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$,

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$,

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$, $\sqrt{7} \approx 2{,}6458$, $\sqrt{17} \approx 4{,}1231$, $\sqrt{37} \approx 6{,}0828$, $\sqrt{71} \approx 8{,}4262$,

$\sqrt{73} \approx 8{,}5440$, $\sqrt{137} \approx 11{,}7047$, $\sqrt{713} \approx 26{,}7021$.