Klasówka poprawkowa, matematyka A, 13 czerwca 2006, szkice rozwiązań

Ten plik się wydłużył i zawiera już rozwiązania wszystkich zadań.

1 $*$ — liczby zespolone **2** $*$ — całki **3** $*$ — równania różniczkowe

11. Niech $M=\begin{pmatrix}-1&2&0\\-1&3&-2\\-1&2&-1\end{pmatrix}$. Niech $\vec{\mathbf{v}}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Znaleźć $M\vec{\mathbf{v}}$. Znaleźć wartości własne (rzeczywiste lub zespolone) i wektory własne macierzy M. Wykazać, że macierz M ma macierz odwrotną i znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^{-1}. Napisać równanie płaszczyzny $P\subset\mathbb{R}^3$ prostopadłej do wektora $\overrightarrow{[0,-1,1]}$ przechodzącej przez punkt $\mathbf{0}=(0,0,0)$. Sprawdzić, że dla każdego $\vec{\mathbf{x}}\in P$ zachodzi $M\vec{\mathbf{x}}\in P$.

Rozw. Obliczamy współrzędne wektora $M\vec{\mathbf{v}}$: pierwsza$=(-1)\cdot2+2\cdot2+0\cdot1=2$, druga$=(-1)\cdot2+3\cdot2+(-2)\cdot1=2$, trzecia$=(-1)\cdot2+2\cdot2+(-1)\cdot1=1$. Mamy więc $M\cdot\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{v}}$, zatem $\vec{\mathbf{v}}$ jest wektorem własnym macierzy M, który odpowiada wartości własnej 1 (wynika to natychmiast z definicji wartości własnej, którą trzeba pamiętać!!!). Znajdziemy wartości własne macierzy M. Są one pierwiastkami wielomianu charakterystycznego

$$\det(M-\lambda\cdot I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&2&0\\-1&3-\lambda&-2\\-1&2&-1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\2&-1-\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1&-2\\-1&-1-\lambda\end{vmatrix}+$$
$$+0\begin{vmatrix}-1&3-\lambda\\-1&2\end{vmatrix}=(-1-\lambda)[(3-\lambda)\cdot(-1-\lambda)-(-2)\cdot2]-2[(-1)\cdot(-1-\lambda)-(-2)\cdot(-1)]=$$
$$=(-\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1)-2(\lambda-1)=(\lambda-1)[-(\lambda+1)(\lambda-1)-2]=(\lambda-1)[-\lambda^1-1]=-(\lambda-1)(\lambda^2+1).$$

Wobec tego wartościami własnymi macierzy M są liczby 1, i oraz $-i$. Wektor własny odpowiadający 1 już znaleźliśmy. Oczywiście oprócz $\vec{\mathbf{v}}$ wektorami własnymi odpowiadającymi 1 są np. $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2i\\2i\\-i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6\\-6\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\sqrt5\\2\sqrt5\\\sqrt5\end{pmatrix}$, $\dots$, ogólnie można pomnożyć $\vec{\mathbf{v}}$ przez dowolną liczbę różną od 0. By znaleźć wektory własne odpowiadające wartości własnej i należy znaleźć wszystkie niezerowe rozwiązania układu równań $\begin{cases}-x+2y+0z=ix;\\-x+3y-2z=iy;\\-x+2y-\ \ z=iz.\end{cases}$ Bez większego trudu stwierdzamy, że konsekwencją tego układu są równości $y=z=\frac{1+i}{2}x$. Przyjmując np. $x=1-i$ otrzymujemy wektor $\begin{pmatrix}1-i\\1\\1\end{pmatrix}$, który można pomnożyć przez dowolną liczbę różną od 0, by otrzymać inny wektor odpowiadający wartości własnej i. Ponieważ macierz M jest rzeczywista oraz $\bar{i}=-i$, więc przykładem wektora własnego odpowiadającego tej wartości własnej jest wektor $\begin{pmatrix}\overline{1-i}\\\overline{1}\\\overline{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i\\1\\1\end{pmatrix}$. Ponieważ 0 nie jest wartością własna macierzy M, więc jest wyznacznik jest różny od 0 jako iloczyn wszystkich wartości własnych M. Wobec tego istnieje M^{-1}. Z równości $M\vec{\mathbf{w}}=\lambda\vec{\mathbf{w}}$ wynika od razu, że $\lambda^{-1}\vec{\mathbf{w}}=M^{-1}\vec{\mathbf{w}}$, a to oznacza, że jeśli wektor własny $\vec{\mathbf{w}}$ odpowiada wartości własnej λ macierzy M, to λ^{-1} jest wartością własną macierzy M^{-1}, której odpowiada wektor własny $\vec{\mathbf{w}}$. Oznacza to, że wartościami własnymi macierzy M^{-1} są liczby $1^{-1=1}$, $i^{-1}=-i$ oraz $(-i)^{-1}=i$. Odpowiadają im kolejno wektory własne $\vec{\mathbf{v}}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1-i\\1\\1\end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix}1+i\\1\\1\end{pmatrix}$.

Równanie płaszczyzny P to $0\cdot x-1\cdot y+1\cdot z=0\cdot0-1\cdot0+1\cdot0=0$, czyli $y=z$. Jeśli $\vec{\mathbf{x}}\in P$, to istnieją liczby x,y takie, że $\vec{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}x\\y\\y\end{pmatrix}$. Wtedy $M\vec{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot x+2\cdot y+0\cdot y\\(-1)\cdot x+3\cdot y-2\cdot y\\(-1)\cdot x+2\cdot y-1\cdot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y\\-x+y\\-x+y\end{pmatrix}\in P$, bo druga i trzecia współrzędna $M\vec{\mathbf{x}}$ są równe.

Uwaga: Można zauważyć, że wektory własne macierzy M odpowiadające wartościom własnym i oraz

$-i$ leżą w płaszczyźnie P, są oczywiście liniowo niezależne, zatem jeśli $\vec{\mathbf{u}} \in P$, to
$\vec{\mathbf{u}} = \alpha\begin{pmatrix}1-i\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1+i\\1\\1\end{pmatrix}$*, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ są odpowiednio dobranymi liczbami. Ponieważ* $M\cdot\vec{\mathbf{u}} =$
$= M\cdot\left[\alpha\begin{pmatrix}1-i\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1+i\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \alpha i\begin{pmatrix}1-i\\1\\1\end{pmatrix} + \beta(-i)\begin{pmatrix}1+i\\1\\1\end{pmatrix}$*, więc $M\vec{\mathbf{u}} \in P$ jako kombinacja liniowa wektorów* $\begin{pmatrix}1-i\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+i\\1\\1\end{pmatrix}$.

12. Jaki zbiór opisany jest równaniem:
(a) $(1+i\sqrt{3})z = (1-i\sqrt{3})\bar{z}$,
(b) $z\bar{z} + 5 = (2-i)z + (2+i)\bar{z}$,
(c) $z\bar{z} + 4 = (2-i)z + (2+i)\bar{z}$.

Rozw. Niech $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$. Wtedy $z = x + iy$. Równanie z punktu (a) przybiera postać
$$x - y\sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y) = x - y\sqrt{3} - i(x\sqrt{3} + y),$$
czyli $x\sqrt{3} + y = 0$. Jest to równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, która jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{[\sqrt{3}, 1]}$, więc równoległej do wektora $\overrightarrow{[1, -\sqrt{3}]}$. Prosta ta tworzy z dodatnią półosią poziomą kąt, którego tangens jest równy $-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc kąt $-\frac{\pi}{6}$, czyli -30°.

Zauważmy, że $\overline{2+i} = 2 - i$ oraz $(2+i)(2-i) = 5$. Mamy $0 = z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} + 5 = z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} + (2-i)(2+i) = \big[z - (2+i)\big]\big[\bar{z} - (2-i)\big] = \big[z - (2+i)\big]\cdot\overline{\big[z - (2+i)\big]} = \big|z - (2+i)\big|^2$, zatem $z = 2 + i$. Jest to równanie zbioru **jednopunktowego**.

Powtarzając poprzednie rozumowanko otrzymujemy $\big|z - (2+i)\big|^2 = 1$ (wystarczy na wstępie dodać i odjąć 1). Wobec tego równanie w punkcie (c) opisuje okrąg o środku $2 + i$ i promieniu 1.

13. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z, dla których $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Znaleźć z^6 dla każdej z nich.

Rozw. Mamy $0 = z^4 - z^2 + 1 = \big(z^2 - \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{3}{4} = \big(z^2 - \frac{1}{2}\big)^2 - \big(i\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 = \big(z^2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\big)\big(z^2 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$, zatem albo $z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ albo $z^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}$. W pierwszym przypadku z wzoru de Moivre'a wynika od razu, że $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$ lub $z = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$, a w drugim $z = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ lub $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$. W obu przypadkach mamy $z^6 = (z^2)^3 = \big(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\big)^3 = \cos\pi \pm \sin\pi = -1$, bowiem $\big(\cos\alpha \pm \sin\alpha\big)^n = \cos(n\alpha) \pm \sin(n\alpha)$ — wzór de Moivre'a.

---

21. Obliczyć $\int x^2 e^{3x}\,dx$.

Rozw. Mamy $\int x^2 e^{3x}\,dx \overset{\text{przez}}{\underset{\text{części}}{=}} x^2\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\big[2x\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\big]\,dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int\big[xe^{3x}\big]\,dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\Big[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx\Big] = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$.

22. Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $A = \{(x,y)\colon\quad |x| \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le y \le 2 + \cos x\}$.

Rozw. Ponieważ obszar jest symetryczny względem osi OY, więc środek masy tego jednorodnego obszaru leży na osi symetrii, czyli na osi OY. Potrzebne będzie nam pole obszaru. Jest ono równe $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[2 + \cos x - 1]\,dx = (x + \sin x)\big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - \big[-\frac{\pi}{2} + \sin\big(-\frac{\pi}{2}\big)\big] = \pi + 2$. Środek masy jednorodnego odcinka pionowego o końcach $(x,1)$ i $(x, 2+\cos x)$ to punkt $\big(x, \frac{3+\cos x}{2}\big)$. Skupiona w nim masa to długość tego odcinka czyli $1 + \cos x$. Wobec tego druga współrzędna środka masy obszaru równa jest $\frac{1}{\pi+2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big[\frac{3+\cos x}{2}\cdot(1+\cos x)\,dx\big]\,dx = \frac{1}{2(\pi+2)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big[3 + 4\cos x + \cos^2 x\big]\,dx = \frac{1}{2(\pi+2)}\big[3x + 4\sin x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}\big]\big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2(\pi+2)}\big[3\pi + 4\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\pi\big] = \frac{7\pi+16}{4\pi+8}$. Wobec tego środkiem ciężkości tego obszaru jest punkt $\big(0, \frac{7\pi+16}{4\pi+8}\big)$

23. Obliczyć $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$.

Rozw. Zachodzą równości $\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty[x^2\cdot 2xe^{-x^2}]\,dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\big|_0^\infty + \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx =$

$=-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}\Big|_0^\infty-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]+\frac{1}{2}\left[0^2e^{-0^2}+e^{-0^2}\right]=\frac{1}{2}$, bo $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}\overset{\text{de l'Hospital}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$.

---

31. Znaleźć różniczkowalną funkcję x zmiennej t określoną na pewnym przedziale otwartym I zawierającym liczbę 1 taką, że $tx'(t)-x(t)=\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^3}$ dla $t\in I$ oraz

(a) $x(0)=1$; **(b)** $x(1)=\frac{2}{5}$; **(c)** $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=-1$.

Rozw. Możemy napisać $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3}=\frac{tx'-x}{t^2}=\left[\frac{x}{t}\right]'$ — piszemy x zamiast $x(t)$. Stąd wynikają równości $\frac{x}{t}=\int\left(\frac{x}{t}\right)'dt=\int\frac{tx'-x}{t^2}dt=\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3}dt\overset{y=1+t^2}{\underset{dy=2t\,dt}{=\!=\!=}}\frac{1}{2}\int\frac{1}{y^{3/2}}dy=\frac{1}{2}\int y^{-3/2}dy=-y^{-1/2}+C=$

$=\frac{-1}{\sqrt{1+t^2}}+C$.

Wobec tego $x(t)=x=\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}+Ct$.

(a) Podstawiając $t=0$ do równania otrzymujemy $0\cdot x'(0)-x(0)=\frac{0^3}{\sqrt{1+0^2}}=0$. Z tej równości wynika, że $x(0)=0$, zatem nie istnieje taka funkcja.

(b) Ma być spełniona równość $\frac{2}{5}=x(1)=\frac{-1}{\sqrt{1+1^2}}+C\cdot 1$. Wobec tego $C=\frac{2}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}$, zatem $x(t)=\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}+\left[\frac{2}{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right]t$.

(c) Mamy $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1/t^2+1}}=-1$, zatem wystarczy przyjąć $C=0$. Rozwiązaniem jest więc funkcja $x(t)=\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}$, innych nie ma, bo dla $C\neq 0$ granica $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}+Ct\right]$ co prawda istnieje, ale nie jest skończona, więc nie jest równa 1.

Uwaga. Początek rozwiązania może wydać się niektórym z Państwa nieco sztuczny. Zamiast podzielenia równania stronami przez t^2 można zająć się najpierw równaniem jednorodnym $tx'-x=0$. Zauważyć, że można je przepisać w postaci $\frac{x'}{x}=\frac{1}{t}$ (rozdzieliliśmy zmienne), scałkować obustronnie tę równość: $\ln|x|=\ln|t|$. Wywnioskować stąd, że $x=ct$ dla pewnej liczby c. Następnie uzmiennić stałą c i poszukać rozwiązania równania niejednorodnego w postaci $tc(t)$. Wtedy $\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^3}=t(ct)'-ct=t^2c'+tc-ct=t^2c'$, zatem $c'=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3}$ i wobec tego $c=\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}^3}dt=-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}+C$ i wobec tego $x(t)=$ $=tc(t)=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}+Ct$ dla pewnej liczby C.

32. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'(t)=\sin t\cdot x(t)^2$ i takie rozwiązanie x, że $x(0)=0$.

Rozw. Mamy $\frac{x'}{x^2}=\sin t$. Po scałkowaniu obu stron otrzymujemy $-\frac{1}{x}=\cos t+C$, zatem $x(t)=\frac{-1}{C+\cos t}$. Jest to rozwiazanie ogólne, które jednak nie obejmuje wszystkich rozwiązań, mianowicie tych, których wartość w pewnym punkcie jest równa 0, bowiem przez 0 dzielić nie wolno! Bez żadnych trudności możemy zauważyć, że funkcja tożsamościowo równa 0, $x(t)=0$ dla każdego t, spełnia wyjściowe równanie. Jest ona jedynym rozwiązaniem, dla którego $x(0)=0$, bowiem warunek początkowy wyznacza rozwiązanie jednoznacznie (to twierdzenie z wykładu usprawiedliwia „zgadywanie" rozwiązań).

33. W ciągu roku masa 1 g radu zmniejszyła się o $0,00044$ g. Niech $m(t)$ oznacza masę po upływie t lat. Oznacza to, że $m(0)=1$ g. Dla bardzo krótkich okresów czasu (Δt) ubytek masy jest w przybliżeniu proporcjonalny do masy i do Δt, w granicy gdy $\Delta t\longrightarrow 0$ równość jest dokładna (nie chodzi tu o równość $0=0$). Jaka będzie masa tej substancji po upływie t lat? Po jakim czasie masa radu równa będzie 0,5 g.

Uwaga: Liczba t nie musi być całkowita.

Rozw. Niech $\lambda>0$ oznacza współczynnik proporcjonalności, o którym mówi się w zadaniu. Wobec tego $m(t+\Delta t)-m(t)=\lambda\cdot m(t)\cdot\Delta t$, czyli $\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t}=-\lambda m(t)$. Wobec tego $-\lambda m(t)=$ $=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t}=m'(t)$. Rozwiązaniem równania różniczkowego $m'(t)=-\lambda m(t)$ jest funkcja postaci $Ce^{-\lambda t}$. Mamy $1=m(0)=Ce^{-\lambda\cdot 0}=C$, więc $m(t)=e^{-\lambda t}$. Mamy też $e^{-\lambda}=m(1)=$ $=1-0{,}00044=0{,}99956$, a to oznacza, że $\lambda=-\ln 0{,}99956$. Mamy znaleźć t takie, że $\frac{1}{2}=m(t)=e^{-\lambda t}$, czyli $-\lambda t=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$. Stąd wynika, że $t=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{\ln 2}{-\ln 0{,}99956}\approx 1575$. Oznacza to, że po około 1575 latach z jednego grama radu zostanie pół grama radu. Oczywiście nie oczekiwaliśmy tego przybliżenia na klasówce, odpowiedź po $\frac{\ln 2}{-\ln 0{,}99956}$ latach byłaby wystarczająca.

34. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) - 6x'(t) + 8x(t) = t + e^{2t}$.

Rozw. Najpierw znajdziemy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $x''(t) - 6x'(t) + 8x(t) = 0$. Pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $\lambda^2 - 6\lambda + 8$ są liczby 2 i 4, zatem rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja $c_1e^{2t} + c_2e^{4t}$.

Teraz znajdziemy rozwiązanie szczególne równania $x''(t) - 6x'(t) + 8x(t) = t$. Ponieważ 0 nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, więc istnieje rozwiązanie postaci $at + b$. Podstawiając do równania otrzymujemy $t = (at + b)'' - 6(at + b)' + 8(at + b) = 8at + (b - 6a)$. Wobec tego, że współczynniki przy takich samych potęgach t po obu stronach równości muszą być równe, spełnione muszą być równania $8a = 1$ i $b - 6a = 0$. Oznacza to, że $a = \frac{1}{8}$ i $b = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Rozwiązaniem jest wielomian pierwszego stopnia: $\frac{1}{8}t + \frac{3}{4}$ (istnieje wiele innych, ale żadne z nich nie jest wielomianem).

Teraz kolej na równanie $x''(t) - 6x'(t) + 8x(t) = e^{2t}$. Liczba 2 jest pierwiastkiem **jednokrotnym** wielomianu charakterystycznego, więc można znaleźć rozwiązanie postaci $(at + b)e^{2t}$ tego równania. Ponieważ funkcja be^{2t} jest rozwiązaniem równania jednorodnego ($c_1 = 0$, $c_2 = b$), więc żadnego warunku na współczynnik b nie otrzymamy, może on przyjmować dowolną wartość. Możemy więc znaleźć rozwiązanie postaci ate^{2t} (przyjęliśmy $b = 0$, można!). Podstawiamy do równania i otrzymujemy $e^{2t} = \big(ate^{2t}\big)'' - 6\big(ate^{2t}\big)' + 8\big(ate^{2t}\big) = -2ae^{2t}$, zatem $a = -\frac{1}{2}$. Oznacza to, że jednym z rozwiązań jest funkcja $-\frac{1}{2}e^{2t}$. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym równania $x''(t) - 6x'(t) + 8x(t) = t + e^{2t}$ jest funkcja $\frac{1}{8}t + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2t} + c_1e^{2t} + c_2e^{4t}$, gdzie c_1, c_2 są dowolnymi liczbami (rzeczywistymi, jeśli poszukujemy rozwiązań rzeczywistych; zespolonymi, gdy interesujemy się rozwiązaniami zespolonymi).

35. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 0$.

Rozw. Równanie charakterystyczne wygląda tak $0 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$, zatem ma ono jeden pierwiastek podwójny, jest nim 4. Rozwiązaniem ogólnym jest więc funkcja $(c_1 + c_2t)e^{4t}$. **KONIEC!!!!!!!**

36. Znaleźć takie rozwiązanie równania $x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0$, że $x(0) = 1$ i $x'(0) = -1$.

Rozw. Równanie charakterystyczne wygląda tak $0 = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda + 1)^2 + 4$, zatem jego pierwiastkami są liczby $-1 \pm 2i$. Rozwiązanie ogólne ma więc postać $c_1e^{(-1+2i)t} + c_2e^{(-1-2i)t}$, gdzie c_1, c_2 są dowolnymi liczbami zespolonymi. Mają być spełnione równości $1 = x(0) = c_1e^{(-1+2i)0} + c_2e^{(-1-2i)0} = c_1 + c_2$ oraz $-1 = x'(0) = c_1(-1 + 2i)e^{(-1+2i)0} + c_2(-1 - 2i)e^{(-1-2i)0} = c_1(-1 + 2i) + c_2(-1 - 2i) = -(c_1 + c_2) + 2i(c_1 - c_2) \xlongequal[\text{równania}]{\text{z pierwszego}} -1 + 2i(c_1 - c_2)$, czyli $c_1 = c_2$. Stąd i z pierwszego równania otrzymujemy $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. Wobec tego poszukiwanym rozwiązaniem jest funkcja $\frac{1}{2}e^{(-1+2i)t} + \frac{1}{2}e^{(-1-2i)t} = \frac{1}{2}e^{-t}[\cos(2t) + i\sin(2t)] + + \frac{1}{2}e^{-t}[\cos(2t) - i\sin(2t)] = e^{-t}\cos(2t)$. Jest to oczywiście jedyne rozwiązanie tego zadania. **Koniec.**

Można też udawać, że liczby zespolone w zasadzie nie istnieją, co nie jest najlepszym pomysłem, ale ludzie robią różne rzeczy. Wyglądałoby to tak. Ponieważ pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są liczby $-1 \pm 2i$, więc rozwiązaniem ogólnym jest funkcja $d_1e^{-t}\cos(2t) + d_2e^{-t}\sin(2t)$. Z warunków $x(0) = 1$ i $x'(0) = -1$ otrzymujemy układ równań z niewiadomymi d_1, d_2. Po rozwiązaniu go stwierdzamy, że $d_1 = 1$ i $d_2 = 0$.

Wzory, które mogą, choć nie muszą, przydać się:

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\quad \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$,

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\quad \operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$,

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.