Klasówka poprawkowa, matematyka A, 13 czerwca 2006

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1 $*$ — liczby zespolone **2** $*$ — całki **3** $*$ — równania różniczkowe

---

11. Niech $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Niech $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Znaleźć $M\vec{\mathbf{v}}$. Znaleźć wartości własne (rzeczywiste lub zespolone) i wektory własne macierzy M. Wykazać, że macierz M ma macierz odwrotną i znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^{-1}. Napisać równanie płaszczyzny $P \subset \mathbb{R}^3$ prostopadłej do wektora $\overrightarrow{[0,-1,1]}$ przechodzącej przez punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Sprawdzić, że dla każdego $\vec{\mathbf{x}} \in P$ zachodzi $M\vec{\mathbf{x}} \in P$.

12. Jaki zbiór opisany jest równaniem:

(a) $(1 + i\sqrt{3})z = (1 - i\sqrt{3})\bar{z}$,

(b) $z\bar{z} + 5 = (2 - i)z + (2 + i)\bar{z}$,

(c) $z\bar{z} + 4 = (2 - i)z + (2 + i)\bar{z}$.

13. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z, dla których $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Znaleźć z^6 dla każdej z nich.

---

21. Obliczyć $\int x^2 e^{3x}\,dx$.

22. Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $A = \{(x,y)\colon \quad |x| \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le y \le 2 + \cos x\}$.

23. Obliczyć $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$.

---

31. Znaleźć różniczkowalną funkcję x zmiennej t określoną na pewnym przedziale otwartym I zawierającym liczbę 1 taką, że $tx'(t) - x(t) = \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}^{\,3}}$ dla $t \in I$ oraz

(a) $x(0) = 1$; **(b)** $x(1) = \frac{2}{5}$; **(c)** $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -1$.

32. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x'(t) = \sin t \cdot x(t)^2$ i takie rozwiązanie x, że $x(0) = 0$.

33. W ciągu roku masa 1 g radu zmniejszyła się o $0,00044$ g. Niech $m(t)$ oznacza masę po upływie t lat. Oznacza to, że $m(0) = 1$ g. Dla bardzo krótkich okresów czasu (Δt) ubytek masy jest w przybliżeniu proporcjonalny do masy i do Δt, w granicy gdy $\Delta t \longrightarrow 0$ równość jest dokładna (nie chodzi tu o równość $0 = 0$). Jaka będzie masa tej substancji po upływie t lat? Po jakim czasie masa radu równa będzie $0{,}5$ g.

Uwaga: Liczba t nie musi być całkowita.

34. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) - 6x'(t) + 8x(t) = t + e^{2t}$.

35. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 0$.

36. Znaleźć takie rozwiązanie równania $x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 0$, że $x(0) = 1$ i $x'(0) = -1$.

Wzory, które mogą, choć nie muszą, przydać się:

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\quad \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$,

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\quad \operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$,

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.