## Klasówka 4, matematyka A, 5 kwietnia 2006, rozwiązania

**1.** Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. Niech $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Znaleźć $M\vec{\mathbf{v}}$. Znaleźć wartości własne (rzeczywiste lub zespolone) i wektory własne macierzy $M$. Wykazać, że macierz $M$ ma macierz odwrotną i znaleźć wartości i wektory własne macierzy $M^{-1}$. Wykazać, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość $\|M\vec{\mathbf{x}}\| = 5\|\vec{\mathbf{x}}\|$. Napisać równanie płaszczyzny $P \subset \mathbb{R}^3$ prostopadłej do wektora $\vec{\mathbf{v}}$ przechodzącej przez punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Sprawdzić, że dla każdego $\vec{\mathbf{x}} \in P$ zachodzi $M\vec{\mathbf{x}} \in P$.

**Rozwiązanie**

Mamy $M \cdot \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, zatem $-5$ jest wartością własną macierzy $M$, a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ to wektor własny jej odpowiadający. Mamy

$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 5 \\ 4 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda) + 5[-16 - 3(3-\lambda)] = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda - 125$. Wiemy już, że liczba $-5$ jest wartością własną macierzy $M$, zatem jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy $M$, czyli wielomianu $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda - 125$. Wynika stąd, że ten wielomian jest podzielny przez $\lambda - (-5) = \lambda + 5$. Stąd już łatwo wnioskujemy, że $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda - 125 = -(\lambda+5)(\lambda^2 - 8\lambda + 25) = -(\lambda+5)[(\lambda-4)^2 + 9]$ i wobec tego $\lambda = 4 \pm 3i$. Macierz $M$ ma więc trzy różne wartości własne, zatem każdej odpowiada jednowymiarowa przestrzeń własna. Wobec tego dla każdego wektora własnego $\vec{\mathbf{w}}$ odpowiadającego wartości $-5$ istnieje liczba $t$ taka, że $\vec{\mathbf{w}} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Mamy $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5z \\ 4x+3y \\ 3x-4y \end{pmatrix}$. Stąd wynika, że jeśli $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $4+3i$, to $(4+3i)x = 5z$, $(4+3i)y = 4x+3y$ i $(4+3i)z = 3x - 4y$. Z pierwszego równania wynika, że $z = \frac{4+3i}{5}x$, z drugiego — $x = \frac{1+3i}{4}y$, a stąd $z = \frac{4+3i}{5}\frac{1+3i}{4}x = \frac{-5+15i}{20}y = \frac{-1+3i}{4}y$. Przykładem wektora własnego odpowiadającego $\lambda = 4+3i$ jest $\begin{pmatrix} 1+3i \\ 4 \\ -1+3i \end{pmatrix}$, każdy inny odpowiadający tej wartości własnej otrzymujemy mnożąc ten przez odpowiednią liczbę (zespoloną). Ponieważ $4 - 3i = \overline{4+3i}$ i macierz $M$ jest **rzeczywista**, więc wartości własnej $4-3i$ odpowiada wektor $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 4 \\ -1-3i \end{pmatrix}$. Mamy $\det(M) = -125 \neq 0$ — wystarczy przyjąć $\lambda = 0$ w wielomianie charakterystycznym $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda - 125$, a to oznacza, że macierz $M$ ma macierz odwrotną. Mnożąc równość $M \cdot \vec{\mathbf{v}}$ z lewej strony przez $M^{-1}$ otrzymujemy $\vec{\mathbf{v}} = M^{-1}\lambda\vec{\mathbf{v}} = \lambda M^{-1}\vec{\mathbf{v}}$, więc $\frac{1}{\lambda}\vec{\mathbf{v}} = M^{-1}\vec{\mathbf{v}}$, a to oznacza, że wartościami własnym macierzy $M{-}1$ są odwrotności wartości własnych macierzy $M$, a odpowiadają im te same wektory własne, co w przypadku $M$. Teraz sprawdzimy, że $\|M\vec{\mathbf{x}}\| = 5\|\vec{\mathbf{x}}\|$. Niech $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Wtedy

$\|M\vec{\mathbf{x}}\|^2 = (5z)^2 + (4x+3y)^2 + (3x-4y)^2 = 25x^2 + 25y^2 + 25z^2 = 25\|\vec{\mathbf{x}}\|^2$. Równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $\vec{\mathbf{v}}$ ma oczywiście postać $2x - y - 2z = \text{const}$, a stałą mamy dobrać tak, by punkt $\mathbf{0}$ leżał w tej płaszczyźnie, czyli by $2\cdot 0 - 1\cdot 0 - 2\cdot 0 = \text{const}$, a to oznacza, że to równanie to $2x - y - 2z = 0$. Jeśli punkt $(x,y,z)$ leży w płaszczyźnie $2x-y-2z=0$, to punkt $(5z, 4x+3y, 3x-4y)$ też, bo $2(5z) - (4x+3y) - 2(3x-4y) = -5(2x-y-2z) = 0$. ■

**2.** Jaki zbiór opisany jest równaniem:

(a) $\mathrm{Re}\big[(1+i)z\big] = 2$, (b) $z\bar{z} + z + \bar{z} = -1$, (c) $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$.

**Rozwiązanie**

Niech $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. Wtedy równanie przyjmuje postać $2 = \mathrm{Re}\big[(1+i)(x+iy)\big] = x-y$. Jest więc to równanie prostej, która przechodzi przez punkty $(2,0)$ i $(0,-2)$, a więc takiej, która tworzy kąt $\frac{\pi}{4}$ z osią poziomą.

Drugie równanie można napisać tak: $0 = z\bar{z}+z+\bar{z}+1 = (z+1)(\bar{z}+1) = (z+1)\overline{(z+1)} = |z+1|^2$, a to jest równoważne równości $z=-1$. Opisuje ono zbiór jednopunktowy.

Trzecie równanie można przepisać tak: $1 = z\bar{z}+z+\bar{z}+1 = (z+1)(\bar{z}+1) = (z+1)\overline{(z+1)} = {=}|z+1|^2$. Oznacza ono, że odległość punktów $-1$ i $z$ równa jest $1$. Jest to zatem równanie okręgu o środku w punkcie $-1$ i promieniu $1$.

*Uwaga: równania w punktach (b) i (c) można przeanalizować wprowadzając oznaczenie $z = x+iy$.*

**3.** Znaleźć wszystkie liczby zespolone $z$, dla których $z^4 - \sqrt{3}z^2 + 1 = 0$. Znaleźć $z^{2006}$ dla jednej z nich.

**Rozwiązanie**

Z wzoru na pierwiastki równania kwadratowego otrzymujemy $z^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ lub też $z^2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$. Z pierwszej równości wynika, że $z = \pm[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}]$, a z drugiej — że $z = \pm[\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}]$. Dla porządku: $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, więc $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = {=}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, zatem $z = \pm\Big[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Big]$ lub $z = \pm\Big[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Big]$. Mamy

$\big[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\big]^{2006} = \cos\frac{2006\pi}{12} + i\sin\frac{2006\pi}{12} = \cos\big(167\pi + \frac{\pi}{6}\big) + i\sin\big(167\pi+\frac{\pi}{6}\big) = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = {=}-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. Ponieważ $\overline{wz} = \bar{w}\bar{z}$, więc $\big[\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\big]^{2006} = \overline{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

*Uwaga: Do znalezienia $\cos\frac{\pi}{12}$ i $\sin\frac{\pi}{12}$ można zastosować „znane” wzory $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = {=}1 - 2\sin^2\alpha$. Można też znaleźć pierwiastek kwadratowy z liczby $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ korzystając wprost z definicji. Niech $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Zakładamy oczywiście, że $x,y\in\mathbb{R}$. Muszą więc być spełnione równości $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\frac{1}{2} = 2xy$. Wobec tego $x^2 - y^2 = 2xy\sqrt{3}$. Ponieważ $0 \neq \frac{1}{2} = 2xy$, więc $y \neq 0$. Stąd $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{3} - 1 = 0$, zatem $\frac{x}{y} = \sqrt{3}\pm 2$. Stąd $\frac{1}{2} = 2(\sqrt{3}\pm 2)y^2$, zatem $0 \le y^2 = \frac{1}{4(\sqrt{3}\pm 2)} = \frac{1}{4(\sqrt{3}+2)} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}$, więc $y = \pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Stąd $x = \pm\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, więc $z = \pm\Big[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Big]$. Ponieważ $\frac{\sqrt{3}-i}{2} = \overline{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}$, więc $\Big\{\pm\Big[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Big]\Big\}^2 = \overline{\Big\{\pm\Big[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Big]\Big\}^2} = \overline{\frac{\sqrt{3}+i}{2}} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.* ■

**4.** Obliczyć $\int x^2 \sin(4x)\,dx$.

**Rozwiązanie**

Całkujemy przez części: $\int x^2 \sin(4x)\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos(4x) + \frac{1}{2}\int x\cos(4x)\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos(4x) +$ $+\frac{1}{8}x\sin(4x) - \frac{1}{8}\int \sin(4x)\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos(4x) + \frac{1}{8}x\sin(4x) + \frac{1}{32}\cos(4x) + \mathrm{const}$. ■

**5.** Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $A = \{(x,y)\colon\quad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}$.

**Rozwiązanie**

Zaczniemy od znalezienia pola tego obszaru: $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2$.Obszar jest symetryczny względem prostej pionowej $x = \frac{\pi}{2}$. Wobec tego jego środek masy leży na tej prostej. Znajdziemy pionową współrzędną tego obszaru:

$\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x+0}{2}\cdot(\sin x - 0)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^\pi \big[1-\cos(2x)\big]\,dx = \frac{1}{8}\big[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\big]\big|_0^\pi = \frac{\pi}{8}$. Wynika stąd, że środkiem masy tego obszaru jest punkt $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

*Uwaga: jeśli ktoś nie zauważył, że środek masy musi leżeć na prostej* $x = \frac{\pi}{2}$, *to mógł również pierwsza współrzędną tego środka znaleźć całkując (przez części)*

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin x\,dx = \frac{1}{2}[-x\cos x + \sin x]\big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

**6.** Obliczyć $\int_0^\infty e^{-x}\sin(2x)\,dx$.

**Rozwiązanie**

Zajmiemy się najpierw całką nieoznaczoną. $\int e^{-x}\sin(2x)\,dx = -e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)\,dx =$ $= -\,e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)\,dx$, zatem $5\int e^{-x}\sin(2x)\,dx = -e^{-x}\sin(2x) -$ $-2e^{-x}\cos(2x) + \mathrm{const}$, czyli $\int e^{-x}\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x) - \frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x) + \mathrm{const}$. Z tego wzoru wynika, że $\int_0^\infty e^{-x}\sin(2x)\,dx = \lim_{x\to\infty}[-\frac{1}{5}e^{-x}\sin(2x) - \frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x)] - \left(-\frac{2}{5}\right) = 0 + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$. ■

*Wzory, które mogą, choć nie muszą, przydać się:*

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\qquad \mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$,

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\qquad \mathrm{ctg}(2\alpha) = \frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$,

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.