Klasówka 4, matematyka A, 5 kwietnia 2006

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 120 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. Niech $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Znaleźć $M\vec{\mathbf{v}}$. Znaleźć wartości własne (rzeczywiste lub zespolone) i wektory własne macierzy M. Wykazać, że macierz M ma macierz odwrotną i znaleźć wartości i wektory własne macierzy M^{-1}. Wykazać, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ zachodzi równość $\|M\vec{\mathbf{x}}\| = 5\|\vec{\mathbf{x}}\|$. Napisać równanie płaszczyzny $P \subset \mathbb{R}^3$ prostopadłej do wektora $\vec{\mathbf{v}}$ przechodzącej przez punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Sprawdzić, że dla każdego $\vec{\mathbf{x}} \in P$ zachodzi $M\vec{\mathbf{x}} \in P$.

2. Jaki zbiór opisany jest równaniem:

(a) $\mathrm{Re}\big[(1+i)z\big] = 2$, (b) $z\bar{z} + z + \bar{z} = -1$, (c) $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$.

3. Znaleźć wszystkie liczby zespolone z, dla których $z^4 - \sqrt{3}z^2 + 1 = 0$. Znaleźć z^{2006} dla jednej z nich.

4. Obliczyć $\int x^2 \sin(4x)\,dx$.

5. Znaleźć środek masy jednorodnego obszaru $A = \{(x,y)\colon \quad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}$.

6. Obliczyć $\int_0^\infty e^{-x}\sin(2x)\,dx$.

Wzory, które mogą, choć nie muszą, przydać się:

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$,

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$, $\mathrm{ctg}(2\alpha) = \frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$,

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.