Egzamin poprawkowy, matematyka A, 21 lutego 2006

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest około 10800 sekund

Rozwiązania różnych zadań muszą znaleźć się na różnych kartkach.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_b a$ pamiętając o założeniach o b i a.
Wykazać, że $2\log_{10} 7 + 4\log_{10} 3 < \log_{10} 3 + 3\log_{10} 11 < 3 + 2\log_{10} 2$.

---

2. Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta. Rozwiązać nierówność: $|\cos x - \sin x| < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. Niech $f(x) = \frac{x^3-5x}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^3}$, wiadomo, że $f'(x) = \frac{25(x-1)(x+1)}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^5}$ oraz $f''(x) = \frac{-75x(x^2-5)}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^7}$. W jakich punktach funkcja f jest różniczkowalna (tzn. ma skończoną pochodną I rzędu)? Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie, na których jest wypukła, na których jest wklęsła. Obliczyć granice funkcji f przy $x \longrightarrow \pm\infty$, oraz granice f' w końcach przedziałów, na których funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby a, b takie, że $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, o ile takie liczby istnieją. Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Niech $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Znaleźć wyznacznik macierzy A, jej wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Znaleźć macierze A^{-1}, A^T, $A \cdot A^T$ i ich wyznaczniki. Podać definicję wektora własnego i wartości własnej. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

---

5. Znaleźć kosinus kąta nierozwartego, który tworzą płaszczyzny o równaniach $x + 2y - 2z = 0$ oraz $14x - 5y + 2z = 0$. Znaleźć iloczyn wektorowy wektorów $\vec{\mathbf{v}} = [1, 2, -2]$ i $\vec{\mathbf{w}} = [14, -5, 2]$ oraz kąt jaki tworzy wektor $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ z prostą wspólną obu płaszczyzn. Niech $\vec{\mathbf{u}} = [1, -1, 1]$. Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$.
Znaleźć odległość płaszczyzn o równaniach $x + 2y - 2z = 0$ i $x + 2y - 2z = 5$.

---

6. Który z trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu 1 ma największe pole? Odpowiedź szczegółowo uzasadnić.

---

7. (a) Podać definicję pochodnej funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $\mathbf{p}$ i definicję prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\big(p, f(p)\big)$.

(b) Znaleźć $f'(x)$, jeśli $f(x) = x\cos\left[\sin\left(\frac{x+1}{2x-1} + 2\sqrt[3]{x}\right)\right]$.

(c) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji kotangens w punkcie $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ i równanie stycznej do wykresu funkcji e^{x^2} w punkcie $(0, 1)$.

(d) Znaleźć $g'(2)$, jeśli $g(x) = (x-2)e^{|x-2|} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{3 + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{4+x^2}}\right)$.
