Egzamin, matematyka A, 9 lutego 2006

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 210 minut

Rozwiązania różnych zadań muszą znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Zdefiniować $\log_p q$ pamiętając o założeniach o p i q.
Wykazać, że $1 + \log_{10} \sqrt[7]{2} > \log_{10} 11 > \frac{2}{3} \log_{10} \sqrt[3]{13}$.

---

2. Podać definicję kosinusa i sinusa dowolnego kąta. Rozwiązać nierówność: $|\cos x + \sin x| < \frac{1}{2}$.
Zilustrować jej rozwiązanie na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

---

3. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$. Dla $x \neq 0, 1$ zachodzą równości $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-1/3}(x-1)^{-2/3}(3x-2)$ oraz $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3}(x-1)^{-5/3}$.
W jakich punktach funkcja f jest różniczkowalna (tzn. ma skończoną pochodną I rzędu)? Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie, na których jest wypukła, na których jest wklęsła. Obliczyć granice funkcji f przy $x \longrightarrow \pm\infty$, oraz granice f' w końcach przedziałów, na których funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby a, b takie, że $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, o ile takie liczby istnieją. Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

---

4. Niech $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. Znaleźć wyznacznik macierzy A, jej wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Znaleźć macierze A^{-1}, A^T, $A \cdot A^T$ i ich wyznaczniki. Podać definicję wektora własnego i wartości własnej. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy A^{-1}.

---

5. Znaleźć kosinus kąta nierozwartego, który tworzą płaszczyzny o równaniach $x + 2y + 2z = 0$ oraz $-2x + 5y + 14z = 0$. Znaleźć iloczyn wektorowy wektorów $\vec{\mathbf{v}} = [1, 2, 2]$ i $\vec{\mathbf{w}} = [-2, 5, 14]$ oraz kąt jaki tworzy wektor $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ z prostą wspólną obu płaszczyzn. Niech $\vec{\mathbf{u}} = [1, -1, 1]$. Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$.
Znaleźć odległość płaszczyzn o równaniach $-2x + 5y + 14z = 0$ i $-2x + 5y + 14z = 15$.

---

6. Słup ma wysokość 12 m. W odległości 8 m od słupa stoi dziecko wzrostu 100 cm. Znaleźć wysokość x, na której należy umieścić lampę, by odległość $d(x)$ lampy od końca cienia dziecka była najmniejsza.

---

7. Podać definicję pochodnej funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $\mathbf{p}$. Znaleźć następujące pochodne:
(a) $f'(x)$, jeśli $f(x) = x \cos\left[\sin(9x + 2\sqrt[3]{x})\right]$;
(b) $g'(x)$, jeśli $g(x) = \ln\left(\frac{2}{9+\cos x}\right)$;
(c) $h'(2)$, jeśli $h(x) = (x-2)e^{|x-2|} \cdot \sin\sqrt{3 + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{4+x^2}}$.
