Klasówka poprawkowa, matematyka A, 6 lutego 2006

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 150 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Rozwiązać równanie: $\frac{1}{2}\log(x+11) + \log\frac{5x-10}{6} = 1$.

2. Zdefiniować $\log_d c$ pamiętając o założeniach o c i d. Niech $a = \log_{1000} 2$, $b = \log_{10} 14$. Za pomocą a i b wyrazić $\log_{10} 5$ i $\log_{10} 35$. Wykazać, że $\log_{10} 2 < \frac{12}{19}\log 3$.

3. Rozwiązać równanie: $2\log_4\left[\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})\right] = -1$.
Zilustrować rozwiązanie tego równania na okręgu $x^2+y^2=1$.

4. Podać definicję kosinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność: $|\cos t| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zilustrować rozwiązanie tej nierówności na okręgu $x^2+y^2=1$.

5. Niech $a_n = \frac{(2-n)(n+3)}{4n^2-11n+2005}$, $b_n = \frac{(9n-2n^2)^6}{n^{13}-3n+3}$ i $c_n = \left(0{,}99 + \frac{1}{n}\right)^n$ dla $n = 1,2,3,\ldots$.
Wyjaśnić, czy setny wyraz ciągu (a_n) jest większy, równy czy mniejszy niż $-\frac{1}{4}$.
Znaleźć granice: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

6. Znaleźć kosinus kąta nierozwartego, który tworzą płaszczyzny o równaniach $y+z=0$ oraz $2x+2y+z=0$. Znaleźć iloczyn wektorowy wektorów $\vec{\mathbf{v}} = [0,1,1]$ i $\vec{\mathbf{w}} = [2,2,1]$ oraz kąt jaki tworzy wektor $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ z prostą wspólną obu płaszczyzn. Niech $\vec{\mathbf{u}} = [1,-1,1]$. Obliczyć $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$.

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Znaleźć macierze A^{-1}, A^T i $A^T \cdot A$ oraz wyznaczniki $|A|$ i $|A^T \cdot A|$.

Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ x+3y+2z=4; \\ 2x+4y+5z=9. \end{cases}$

8. Znaleźć pochodną następującej funkcji:

(a) $\cos\left[\sin(3x+\sqrt{x})\right]$ (b) $\ln\left(\frac{2}{\cos x}\right)$ (c) $e^{\sqrt[3]{2-x}}$

9. Niech $f(x) = (x-17)\cdot\cos\left[\sin^2(x-17) + \mathrm{tg}\left(\ln(x-16)\right)\right]\cdot e^{|x-17|}$. Znaleźć $f'(17)$, jeśli ta pochodna istnieje lub wykazać, że funkcja f nie pochodnej w punkcie 17.

10. Niech $f(x) = -x^3 + 12x - 6$. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale domkniętym $[-5,3]$.

Informacje przeróżne (przydatne albo i nie):

$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1+x \leq e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$; $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$, gdy $\frac{\pi}{2} > x > 0$;

$2^7 = 128$; $2^9 = 512$; $2^{12} = 4096$; $2^{20} = 1048576$; $3^4 = 81$, $3^8 = 6561$; $3^{13} = 1594323$.