Klasówka poprawkowa, matematyka A, 17 stycznia 2006

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Rozwiązać równanie:
$$\tfrac{1}{2}\log(x+11)+\log\tfrac{5x-10}{6}=1\,.$$

2. Zdefiniować $\log_d c$ pamiętając o założeniach o c i d. Niech $a=\log_{1000}2$, $b=\log_{10}14$. Za pomocą a i b wyrazić $\log_{10}5$ i $\log_{10}35$. Wykazać, że $\log_{10}2<\frac{12}{19}\log 3$.

3. Rozwiązać równanie: $2\log_4\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})=-1$. Zilustrować rozwiązanie tego równania na okręgu $x^2+y^2=1$.

4. Podać definicję kosinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność: $|\cos t|\geq -\frac{1}{2}$. Zilustrować rozwiązanie tej nierówności na okręgu $x^2+y^2=1$.

6. Niech $a_n=\frac{(2-n)(n+3)}{4n^2-11n+2005}$, $b_n=\frac{(966n-1025n^2)^6}{n^{13}-3n+3}$ i $c_n=\left(0{,}99+\frac{1}{n}\right)^n$ dla $n=1,2,3,\ldots$. Wyjaśnić, czy setny wyraz ciągu (a_n) jest większy, równy czy mniejszy niż -1. A wyraz dwusetny?
Znaleźć granice: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$.

8. Znaleźć kosinus kąta nierozwartego, który tworzą płaszczyzny o równaniach $y+z=0$ i $2x+2y+z=0$. Znaleźć iloczyn wektorowy wektorów $\vec{\mathbf{v}}=[0,1,1]$ i $\vec{\mathbf{w}}=[2,2,1]$ oraz kąt jaki tworzy wektor $\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}}$ z prostą wspólną obu płaszczyzn. Niech $\vec{\mathbf{u}}=[1,-1,1]$. Obliczyć $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})$.

inf. *Informacje przeróżne (przydatne albo i nie):*
$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1+x\leq e^x$ dla $x\in\mathbb{R}$; $\sin x<x<\operatorname{tg}x$, gdy $\frac{\pi}{2}>x>0$.
$2^7=128$, $2^9=1024$, $2^{12}=4096$, $2^{20}=1048576$, $3^4=81$, $3^8=6561$, $3^{13}=1594323$.