

1. Niech $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Znaleźć macierz $B = A \cdot A^T$ i $\det(B)$.

Znaleźć punkty $\mathbf{p}_1 = B\vec{e}_1$, $\mathbf{p}_2 = B\vec{e}_2$, $\mathbf{p}_3 = B\vec{e}_3$.

Znaleźć objętość czworościanu o wierzchołkach $\mathbf{0}$, \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 i \mathbf{p}_3 .

2. Niech $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Znaleźć macierz C^{-1} .

3. Rozwiązać układ równań
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 2x + 2y + z = 2, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Wolno skorzystać z wyników uzyskanych w któryś z poprzednich zadań, jeśli się uda.

4. Znaleźć $f'(x)$ i $g'(x)$, jeśli $f(x) = \sin \frac{2x-3}{3x-5}$ zaś $g(x) = e^{\sqrt{1+x \cos x}}$.

Znaleźć $f'(0)$, jeżeli $f(0) = 0$ i $f(x) = x^2 \sin(e^{1/x})$.

5. Wykazać, że dla każdej liczby $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3} \cdot x^3$ oraz że istnieje liczba $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ taka, że jeśli $0 < x < \delta$, to $\operatorname{tg} x < x + \frac{1}{2} \cdot x^3$.

6. W Grodzie Kaczym, na rogu prostopadłych ulic Kaczora Wielkiego i Kaczora Wspaniałego stoi budynek w kształcie prostopadłościanu. Ściana budynku równoległa do ulicy Kaczora Wielkiego ma 64m długości a ściana równoległa do ulicy Kaczora Wspaniałego ma 27m długości. Pozostałe ściany graniczą z ogromnym, betonowym placem. Kaczka Dziwaczka idzie nad rzeczkę najpierw trawnikiem ulicą Kaczora Wielkiego, a potem ma skręcić w ulicę Kaczora Wspaniałego. Musi jednak przejść obok tego wielkiego budynku, by uiścić opłatę klimatyczną w kasie, która jest ulokowana we wzmiankowym budynku, w jego rogu od strony betonowego placu tj. tym, który nie sąsiaduje z żadną z ulic. Jest już zmęczona, więc chce skrócić drogę idąc przez plac. W jakiej odległości od skrzyżowania powinna wejść Kaczka Dziwaczka na betonowy plac, by przejść najkrótszy odcinek po betonie i nie ominąć kasy ?

Należy zakładać, że trawniki na obu ulicach są prostoliniowe i sąsiadują ze ścianami narożnego domu oraz że obie ulice są bardzo długie.

Może warto coś narysować.