Klasówka 1, matematyka A, 4 listopada 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 90 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Rozwiązać równanie: $\frac{1}{2}\log(x+11)+\log(\frac{5x-10)}{6}=1\,.$

2. Zdefiniować $\log_d c$ nie zapominając o założeniach o c i d. Niech $a=\log_{1000}2$, $b=\log_{10}14$. Wyrazić za pomocą a i b: $\log_{10}5$ i $\log_{10}35$. Wykazać, że $\log 2<\frac{12}{19}\log 3$.

3. Rozwiązać równanie: $2\log_3\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})=-1$. Zilustrować rozwiązanie tego równania na okręgu $x^2+y^2=1$.

4. Podać definicję kosinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność: $\cos t\geq -\frac{1}{2}$. Zilustrować rozwiązanie tej nierówności na okręgu $x^2+y^2=1$.

5. Rozwiązać równanie: $\sin 2\psi=\cos 2\psi$. Zilustrować rozwiązanie tego równania na okręgu $x^2+y^2=1$.

6. Znaleźć następujące granice:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15+7n-1410n^2}{4n^2-11n+2005}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{966n-1025n^2}{n^{13}-3n+3}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(0{,}99+\frac{1}{n}\right)^n.$$

W każdym z trzech przypadków odpowiedzieć na pytanie: czy setny wyraz badanego ciągu jest większy, równy czy mniejszy niż 1? a wyraz dwusetny?

7. Znaleźć kosinus kąta nierozwartego utworzonego przez proste o równaniach $7x+y=16$ i $4x-3y=2$. Narysować te proste w układzie współrzędnych kartezjańskich. Niech $A=(2,2)$, $B=(8,3)$ i $D=(6,-1)$. Znaleźć taki punkt C, by czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem. Znaleźć pole równoległoboku $ABCD$ i jego środek symetrii.

8. Znaleźć kosinus kąta nierozwartego, który tworzą płaszczyzny o równaniach $y+z=0$ i $2x+2y+z=0$. Znaleźć iloczyn wektorowy wektorów $\vec{\mathbf{v}}=[0,1,1]$ i $\vec{\mathbf{w}}=[2,2,1]$ oraz kąt jaki tworzy wektor $\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}}$ z prostą wspólną obu płaszczyzn. Niech $\vec{\mathbf{u}}=[1,-1,1]$. Obliczyć $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{w}})$.

inf. *Informacje przeróżne (przydatne albo i nie):*
$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1+x\leq e^x$ dla $x\in\mathbb{R}$; $\sin x<x<\mathrm{tg}\,x$, gdy $\frac{\pi}{2}>x>0$.
$2^7=128$, $2^9=1024$, $2^{12}=4096$, $2^{20}=1048576$, $3^4=81$, $3^8=6561$, $3^{13}=1594323$.