Matematyka, dodatkowy egzamin poprawkowy, 16 września 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 150 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $\bar{z} \cdot z \cdot |z| + |z^3 - i| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.

2. Znaleźć wszystkie lokalne ekstrema funkcji f, jeśli dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}$ zachodzi równość
$$f(x,y) = \left[(x-1)^2 + y^2\right] \cdot \left[(x+1)^2 + y^2\right].$$

3. Płaszczyzny Π przechodzi przez trzy punkty: $A = (6,0,0)$, $B = (0,3,0)$ i $B = (0,0,2)$.

Znaleźć wektor $[A, B, C]$ prostopadły do płaszczyzny Π.

Znaleźć punkt Y symetryczny do punktu $X = (2,3,4)$ względem płaszczyzny Π.

Napisać równanie płaszczyzny Π.

4. Rozwiązać równanie $x''(t) + 8x'(t) + 25x(t) = 73e^{4t} + 9e^{-4t} - 6te^{-4t}\sin(3t)$.

5. Znaleźć wszystkie funkcje x, dla których
$$x''(t) + 10x'(t) + 25x(t) = 500 + 6(t+1)e^{5t} + 500te^{-5t}.$$

6. Niech $a_0 = 2 = a_1$ i $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Znaleźć a_2, a_3, i a_4.

(b) Znaleźć macierz A taką, że $\binom{a_{n+2}}{a_{n+1}} = A\binom{a_{n+1}}{a_n}$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$

(c) Znaleźć wartości własne λ_1, λ_2 i odpowiadające im wektory własne $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$ macierzy A w taki sposób, by $\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \binom{1}{0} = 1 = \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \binom{1}{0}$.

(d) Znaleźć kąt między wektorami $\vec{\mathbf{v}}_1$ i $\vec{\mathbf{v}}_2$.

(e) Znaleźć liczby α, β takie, że $\binom{2}{2} = \alpha\vec{\mathbf{v}}_2 + \beta\vec{\mathbf{v}}_2$.

(f) Wyrazić wektor $\binom{a_{n+1}}{a_n}$ za pomocą wektora $\binom{a_1}{a_0}$, macierzy A i liczby n.

(g) Wyrazić wektor $\binom{a_{n+1}}{a_n}$ za pomocą wektorów $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$ i liczb n, α, β.

(h) Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.