

Matematyka, egzamin poprawkowy, 7 września 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 120 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

1. Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z , dla których zachodzi równość $\bar{z} \cdot z \cdot |z| + |z^3 + 1| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.

2. Znaleźć wszystkie lokalne ekstrema funkcji f , jeśli dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x, y) = [x^2 + y^2] \cdot [(x - 4)^2 + (y + 2)^2].$$

3. Płaszczyzny Π przechodzi przez trzy punkty: $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 2, 3)$ i $B = (2, -1, 3)$.

Znaleźć wektor $[A, B, C]$ prostopadły do płaszczyzny Π .

Znaleźć punkt Y symetryczny do punktu $X = (9, 3, -5)$ względem płaszczyzny Π .

Napisać równanie płaszczyzny Π .

4. Rozwiązać równanie $x''(t) - 8x'(t) + 25x(t) = 9e^{4t} + 73e^{-4t} + 2e^{4t} \cos(3t) - 12te^{4t} \sin(3t)$.

5. Znaleźć wszystkie funkcje x , dla których

$$x''(t) + 10x'(t) + 25x(t) = 100 + 60te^{-5t} + 6te^{5t} + 60t^2e^{5t} + 100t^3e^{5t}.$$

6. Niech $a_0 = 2 = a_1$ i $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) Znaleźć a_2 , a_3 , i a_4 .

(b) Znaleźć macierz A taką, że $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$

(c) Znaleźć wartości własne λ_1, λ_2 i odpowiadające im wektory własne \vec{v}_1, \vec{v}_2 macierzy A w taki sposób, by $\vec{v}_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = \vec{v}_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Znaleźć kąt między wektorami \vec{v}_1 i \vec{v}_2 .

(e) Znaleźć liczby α, β takie, że $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \vec{v}_2 + \beta \vec{v}_2$.

(f) Wyrazić wektor $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ za pomocą wektora $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$, macierzy A i liczby n .

(g) Wyrazić wektor $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ za pomocą wektorów \vec{v}_1, \vec{v}_2 i liczb n, α, β .

(h) Znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.