Matematyka A, egzamin, 17 czerwca 2005 — rozwiązania

Mam nadzieję, że nie ma tu błędów poza jakimiś literówkami, od których uwolnić się jest bardzo trudno. Zachęcam do obejrzenia rozwiązań zadań z egzaminu dla matematyki A1.

Zadanie 0.

Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których $z\bar{z} + |z^2 - i| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.

Rozwiązanie 1.

Mamy $z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|$. $|z^2 - i|$ to odległość punktów z^2 oraz i, $|z^2|$ to odległość punktu z^2 od punktu 0. Suma odległości punktu z^2 od punktów i oraz 0 ma być równa 1, więc odległości punktu i od punktu 0. Z nierówności trójkąta (znanej ze szkoły podstawowej) wynika, że punkt z^2 musi się znajdować na odcinku o końcach i oraz 0. Oczywiście $z = 0$ spełnia ten warunek. Dalej $z \neq 0$. Musi być $0 < |z| \leq 1$ i $\mathrm{Arg}(z^2) = \frac{\pi}{2}$. Wobec tego $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ lub $\mathrm{Arg}(z) = =\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = \frac{\pi}{4} + \pi$. Wynika stąd, że liczby z leżą na odcinku nachylonym do osi rzeczywistej pod kątem $\frac{\pi}{4}$, którego długość równa jest 2 i którego środkiem jest 0. Końcami tego odcinka są liczby $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\boxtimes$

Rozwiązanie 2.

Niech $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$. Zachodzi też równość $|z^2 - i| = |x^2 + 2ixy - y^2 - i| = \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2xy-1)^2} = \sqrt{(x^2+y^2)^2 - 4xy + 1}$. Wobec tego $(x^2+y^2)^2 - 4xy + 1 = (1 - x^2 - y^2)^2 = 1 - 2(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2$. Stąd wynika, że $2xy = x^2 + y^2$, czyli $(x-y)^2 = 0$, zatem $x = y$. Wracając do wyjściowego równania otrzymujemy $x^2 + x^2 + \sqrt{(2x^2-1)^2} = 1$, czyli $\sqrt{(2x^2-1)^2} = 1 - 2x^2$. Ponieważ $\sqrt{(2x^2-1)^2} \geq 0$, więc $1 - 2x^2 \geq 0$, czyli $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Wobec tego rozwiązaniem jest fragment prostej $y = x$ odpowiadający liczbom $x \in \big[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\big]$. Bez trudu stwierdzamy, że jest to zbiór opisany w końcu rozwiązania pierwszego. $\blacksquare$

Zadanie 1.

Znaleźć wszystkie lokalne ekstrema funkcji f, jeśli dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(x, y) = x^2y^4(7 - x - y)$.

Rozwiązanie.

Funkcja może mieć lokalne ekstrema jedynie w punktach, w których jej gradient, czyli wektor $\nabla f = \mathrm{grad}\ f = \big[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\big] = \big[2xy^4(7-x-y) - x^2y^4, 4x^2y^3(7-x-y) - x^2y^4\big]$ jest zerowy, czyli gdy $2xy^4(7-x-y) - x^2y^4 = 0$ i $4x^2y^3(7-x-y) - x^2y^4 = 0$. Równości te są spełnione w trzech przypadkach $x = 0$ lub $y = 0$ lub $x \neq 0 \neq y$ i $2(7-x-y) - x = 0$ i $4(7-x-y) - y = 0$. W trzecim przypadku musi być $y = 2x$. Podstawiając tę równość np. do pierwszego z dwóch ostatnich równań otrzymujemy $0 = 2(7 - x - 2x) - x = 14 - 7x$, czyli $x = 2$ i wobec tego $y = 4$.

Jest więc wielu kandydatów na lokalne ekstrema (czyli punktów krytycznych funkcji f):

punkty postaci $(0, y)$, punkty postaci $(x, 0)$ i punkt $(2, 4)$.

Mamy $f(0,y)=0$ niezależnie od $y\in\mathbb{R}$. Jeśli $y<7$, to $7-0-y>0$. Załóżmy, że $|u|,|v|<\frac{7-y}{2}$. Wtedy $7-(0+u)-(y+v)>0$. Stąd wynika, że $f(0+u,y+v)\geq 0$, zatem w punkcie $(0,y)$ funkcja f ma lokalne minimum niewłaściwe. Analogicznie wykazujemy, że jeśli $y>7$, to wartości funkcji f w punktach dostatecznie bliskich punktowi $(0,y)$ są niedodatnie, a to oznacza, że w punkcie $(0,y)$ funkcja f ma lokalne maksimum niewłaściwe. W taki sam sposób stwierdzamy, że w punktach postaci $(x,0)$, $x<7$ funkcja ma lokalne minima, a w punktach postaci $(x,0)$, $x>7$ — lokalne maksima. W ten sposób wyjaśniliśmy kwestię lokalnych ekstremów we wszystkich punktach krytycznych z wyjątkiem $(0,7)$, $(7,0)$ i $(2,4)$. Mamy $f(x,7)=x^2\cdot 7^4\cdot(7-x-7)=-7^4\cdot x^3$, to wyrażenie zmienia znak w punkcie 0: dla $x<0$ mamy $f(x,0)>0=f(0,7)$ a dla $x>0$ — $f(x,0)<0=f(0,7)$. Wynika stąd, że w punkcie $(0,7)$ funkcja f lokalnego ekstremum nie ma. Tak samo uzasadniamy, że funkcja f nie ma w punkcie $(7,0)$ lokalnego ekstremum. Kolej na punkt $(2,4)$. Teraz zrobimy, to co wielu studentów lubi najbardziej: zastosujemy twierdzenie. Mamy

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\big(2xy^4(7-x-y)-x^2y^4\big)=2(7-y)y^4-6xy^4=-2y^4(3x+y-7)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\big(2xy^4(7-x-y)-x^2y^4\big)=56xy^3-12x^2y^3-10xy^4=-2xy^3(6x+5y-28)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\big(4x^2y^3(7-x-y)-x^2y^4\big)=12x^2y^2(7-x)-20x^2y^3=-4x^2y^2(3x+5y-21)$.

Stąd wynika, że $D^2f(2,4)=\begin{pmatrix}-6\cdot 4^4 & -4^5\\ -4^5 & -5\cdot 4^4\end{pmatrix}$.

Ponieważ $-6\cdot 4^4<0$ i $(-6\cdot 4^4)(-5\cdot 4^4)-(-4^5)(-4^5)=4^8(30-4^2)>0$, więc w tym punkcie funkcja ma lokalne maksimum. $\boxtimes$

Ostatni fragment można zastąpić rozumowaniem, w którym drugie pochodne się pojawiają. Funkcja f jest ciągła. Trójkąt T o wierzchołkach $(0,7)$, $(0,0)$ i $(7,0)$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, zatem w jakimś punkcie trójkąta T funkcja f przyjmuje największą spośród wartości przyjmowanych w punktach zbioru T. Jasne jest, ze na obwodzie trójkąta funkcja się zeruje, a wewnątrz jest dodatnia, zatem największa wartość musi być przyjęta w jakimś punkcie wewnętrznym. W tym punkcie gradient musi być wektorem zerowym. Jest tylko jeden kandydat: $(2,4)$, zatem w tym punkcie funkcja f ma największą wartość. Wobec tego w tym punkcie ma maksimum lokalne. Oczywiście poza trójkątem T funkcja przyjmuje dowolnie duże wartości, np. $f(-10,-10)=(-10)^2\cdot(-10)^4\cdot(7+10+10)=27\,000\,000>1024=2^2\cdot 4^4\cdot(7-2-4)=f(2,4)$. ■

Zadanie 2.

Niech $\vec{\mathbf{w}}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

(2.1) Znaleźć macierz A taką, że

$$A\vec{\mathbf{x}}=\tfrac{1}{18}(\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{w}}-\tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}+\tfrac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}.$$

(2.2) Znaleźć $A\vec{\mathbf{w}}$.

(2.3) Sprawdzić, że jeśli wektor $\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$, to również wektor $A\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$.

(2.4) Sprawdzić, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}}$ zachodzi równość $\|A\vec{\mathbf{x}}\|=\|\vec{\mathbf{x}}\|$.

(2.5) Niech $\vec{\mathbf{x}}$ oznacza wektor prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Znaleźć kosinus kąta między wektorami $\vec{\mathbf{x}}$ i $A\vec{\mathbf{x}}$.

(2.6) Sprawdzić, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to $|\lambda| = 1$.

Rozwiązanie

Mamy $A\vec{\mathbf{w}} = \frac{1}{18}(\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{w}} = \frac{1}{18}\cdot(1^1+2^2+2^2)\vec{\mathbf{w}} - \frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$. Wobec tego nie jest prawdą, że $\|A\vec{\mathbf{w}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\|$, czyli nie zachodzi równość 2.4. Rzecz w tym, że miało być

$$A\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{18}(\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$$

Zmieniliśmy jeden znak. Rozwiążemy zadanie w poprawnej, w tym przypadku trudniejszej wersji. Mamy $\vec{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{x} = 1\cdot x+2\cdot y+2\cdot z$ oraz $\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}} = \left(\begin{vmatrix}2 & 2\\ y & z\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 2\\ x & z\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ x & y\end{vmatrix}\right) = (2z-2y, 2x-z, y-2x)$. Stąd $A\vec{\mathbf{x}} = \frac{x+2y+2z}{18}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix}2z-2y\\2x-z\\y-2x\end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}10x+(2-6\sqrt{3})y+(2+6\sqrt{3})z\\(2+6\sqrt{3})x+13y+(4-3\sqrt{3})z\\(2-6\sqrt{3})x+(4+3\sqrt{3})y+13z\end{pmatrix}$. Wynika stąd, że

$$A = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}10 & 2-6\sqrt{3} & 2+6\sqrt{3}\\ 2+6\sqrt{3} & 13y & 4-3\sqrt{3}\\ 2-6\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} & 13z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{18} & \frac{2-6\sqrt{3}}{18} & \frac{2+6\sqrt{3}}{18}\\ \frac{2+6\sqrt{3}}{18} & \frac{13}{18} & \frac{4-3\sqrt{3}}{18}\\ \frac{2-6\sqrt{3}}{18} & \frac{4+3\sqrt{3}}{18} & \frac{13}{18}\end{pmatrix}.$$

Znaleźliśmy macierz A. Po poprawieniu treści $A\vec{\mathbf{w}} = \frac{1}{18}\cdot(1^1+2^2+2^2)\vec{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{w}}$.

Niech $\vec{\mathbf{x}}$ będzie wektorem prostopadłym do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Oznacza to, że $\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = 0$. Mamy więc $A\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{18}\cdot 0\cdot\vec{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$. Otrzymany wektor jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$, bo jest sumą dwóch wektorów prostopadłych do wektora $\vec{\mathbf{w}}$ ($\vec{\mathbf{x}}$ z założenia; $\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$ też, bo iloczyn wektorowy jest prostopadły do obydwóch czynników). Wykazaliśmy 2.3

Sprawdzimy, że zachodzi 2.4. Zaczniemy od przypadku $\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = 0$. W tym przypadku $A\vec{\mathbf{x}} = =\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$, przy czym wektory $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}$ i $\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$ są prostopadłe. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $\|A\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \|\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \|\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{4}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{3}{36}\|\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{4}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{1}{12}\|\vec{\mathbf{w}}\|^2\cdot\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 = =\frac{1}{4}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{9}{12}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2$ — skorzystaliśmy z tego, że $\|\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\|\cdot\|\vec{\mathbf{x}}\|$, co jest konsekwencją prostopadłości wektorów $\vec{\mathbf{w}}$ i $\vec{\mathbf{x}}$: w tym przypadku równoległobok rozpięty przez te wektory staje się prostokątem. Niech teraz $\vec{\mathbf{x}}$ oznacza dowolny, niekoniecznie prostopadły do $\vec{\mathbf{w}}$, wektor. Niech $t = \frac{1}{18}\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{x}} - t\vec{\mathbf{w}}$. W tej sytuacji $\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}} - t\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = 0$. Wobec tego wektor $t\vec{\mathbf{w}}$ jest rzutem prostopadłym wektora $\vec{\mathbf{x}}$ na prostą wyznaczoną przez wektor $\vec{\mathbf{w}}$. Mamy więc $A\vec{\mathbf{x}} = A(t\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}}) = tA\vec{\mathbf{w}} + A\vec{\mathbf{v}} = t\vec{\mathbf{w}} + A\vec{\mathbf{v}}$. Ponieważ wektor $\vec{\mathbf{v}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$, więc również wektor $A\vec{\mathbf{v}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Wiemy też, że $\|A\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|$. Wobec tego wektory $\vec{\mathbf{x}}$ i $A\vec{\mathbf{x}}$ zostały przedstawione w postaci sum prostopadłych wektorów o tych samych długościach. Mają więc taką samą długość.

Znów zakładamy, że $\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = 0$. Wtedy $\vec{\mathbf{x}}\cdot A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}\cdot(\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{\mathbf{x}}\|\cdot\|A\vec{\mathbf{x}}\|$, zatem poszukiwany kosinus równy jest $\frac{1}{2}$. Wykazaliśmy 2.5.

Zajmiemy się 2.6. Jeśli $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, to $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \|A\vec{\mathbf{v}}\| = \|\lambda\vec{\mathbf{v}}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{\mathbf{v}}\|$, a ponieważ $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, więc $|\lambda| = 1$. Rozwiązanie zostało zakończone.$\boxtimes$

Uwaga: Można oczywiście rozwiązać to zadanie korzystając w jawny sposób z tego, jak wygląda *macierz A. Niektórzy zdający tak robili. Jest metoda poprawna, ale nie polecam jej, bo można się trochę pogubić w rachunkach. Przed przystąpieniem do obliczeń warto chwilę pomyśleć, czy rzeczywiście są one niezbędne!* ■

Zadanie 3.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 9 & 16 \\ -5 & 2 & 3 & 5 \\ -10 & 0 & 7 & 10 \\ -12 & 0 & 6 & 14 \end{pmatrix}$ oraz macierzy A^{-2}.

Rozwiązanie

Obliczymy $\begin{vmatrix} 16-\lambda & 0 & 9 & 16 \\ -5 & 2-\lambda & 3 & 5 \\ -10 & 0 & 7-\lambda & 10 \\ -12 & 0 & 6 & 14-\lambda \end{vmatrix}$. Ponieważ w kolumnie drugiej zero pojawia się trzy razy, więc najprościej będzie rozwinąć wyznacznik względem tej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & 0 & 9 & 16 \\ -5 & 2-\lambda & 3 & 5 \\ -10 & 0 & 7-\lambda & 10 \\ -12 & 0 & 6 & 14-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 16-\lambda & 9 & 16 \\ -10 & 7-\lambda & 10 \\ -12 & 6 & 14-\lambda \end{vmatrix} =$$

$=(2-\lambda)\big[(16-\lambda)(7-\lambda)(14-\lambda)-9\cdot 10\cdot 12-16\cdot 10\cdot 6+12\cdot 16\cdot(7-\lambda)-6\cdot 10\cdot(16-\lambda)+9\cdot 10\cdot(14-\lambda)\big] =$
$=(2-\lambda)[-\lambda^3+37\lambda^2-656\lambda+1172] = (2-\lambda)^2(\lambda^2-35\lambda+586)$. Wynika stąd, że wartościami własnymi macierzy A są $\lambda_{1,2}=2$ oraz $\lambda_3=\frac{1}{2}(35-i\sqrt{1119})$, $\lambda_4=\frac{1}{2}(35+i\sqrt{1119})$. W celu znalezienia wektorów własnych należy znaleźć niezerowe rozwiązania układów równań liniowych. Zaczniemy $\lambda_{1,2}=2$. W tym przypadku układ wygląda tak

$$\begin{cases} 14x_1+0x_2+9x_3+16x_4=0, \\ -\ 5x_1+0x_2+3x_3+\ 5x_4=0, \\ -10x_1+0x_2+5x_3+10x_4=0, \\ -12x_1+0x_2+6x_3+12x_4=0. \end{cases}$$

Widzimy więc, że x_2 występuje w tym układzie równań tylko pozornie. Oznacza, to że zmiana wartości x_2 nie ma wpływu na to, czy czwórka (x_1,x_2,x_3,x_4) jest rozwiązaniem układu, czy nie. Poza tym równanie trzecie i czwarte są równoważne. Mamy więc układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} 14x_1+9x_3+16x_4=0, \\ -\ 5x_1+3x_3+\ 5x_4=0, \\ -10x_1+5x_3+10x_4=0. \end{cases}$$

Mnożąc drugie równanie przez 2 i odejmując od wyniku trzecie otrzymujemy $x_3=0$. Teraz z drugiego równania wnioskujemy, że $x_1=x_4$, a stąd – po uwzględnieniu pierwszego równania – otrzymujemy $x_1=x_4=0$. Wobec tego wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej 2 są wektory postaci $(0,x_2,0,0)$, gdzie x_2 oznacza dowolną liczbę różną od 0. Teraz zajmiemy się wartością własną λ_3. Układ równań wygląda teraz tak

$$\begin{cases} (-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{1119}}{2})x_1+0x_2+9x_3+16x_4=0, \\ -\ 5x_1+(-\frac{31}{2}+i\frac{\sqrt{1119}}{2})x_2+3x_3+\ 5x_4=0, \\ -10x_1+0x_2+(-\frac{21}{2}+i\frac{\sqrt{1119}}{2})x_3+10x_4=0, \\ -12x_1+0x_2+6x_3+(-\frac{7}{2}+i\frac{\sqrt{1119}}{2})x_4=0. \end{cases}$$

Odejmując od pierwszego równania pomnożonego przez 2 równanie czwarte pomnożone przez 3 otrzymujemy równość, w której występują jedynie niewiadome x_1 i x_4, co pozwala napisać $x_4 = \frac{1}{47}(3 - i\sqrt{1119})x_1$. Podstawiając otrzymaną wartość w miejsce x_4 w równaniu pierwszym otrzymujemy równanie, w którym występują jedynie x_1 i x_3. Stąd $x_3 = -\frac{5}{282}(3 - i\sqrt{1119})x_1$. Następnie z równania drugiego wyznaczamy $x_2 = \frac{1}{9776}(361-89i\sqrt{1119})x_1$. By otrzymać konkretny wektor własny wystarczy teraz podstawić dowolną, różną od 0 liczbę w miejsce x_1. Innymi słowy wszystkie wektory własne odpowiadające wartości własnej $\frac{1}{2}(35-i\sqrt{1119})$ są równoległe do wektora $\big[9776, 361 - 89i\sqrt{1119}, \frac{1}{3}(1560 - 520i\sqrt{1119}), 624 - 208i\sqrt{1119}\,\big]$. Wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej $\frac{1}{2}(35 + i\sqrt{1119})$ nie ma potrzeby zajmować się: po prostu sprzęgamy wektory odpowiadające wartości własnej $\frac{1}{2}(35 - i\sqrt{1119})$, metoda działa, bo wyjściowa macierz jest rzeczywista.

Macierz A^{-2} to macierz odwrotna do macierzy A^2. Wartościami własnymi macierzy A^2 są liczby 2^2, 2^2, $\big(\frac{1}{2}(35 - i\sqrt{1119})\big)^2 = \frac{1}{2}(53 - 35i\sqrt{1119})$ oraz $\big(\frac{1}{2}(35 + i\sqrt{1119})\big)^2 = \frac{1}{2}(53 + 35i\sqrt{1119})$, a wektory własne są takie same jak w przypadku macierzy A. Wynika to stąd, że jeśli $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, to $A^2\vec{\mathbf{v}} = A(A\vec{\mathbf{v}}) = A(\lambda\vec{\mathbf{v}}) = \lambda A\vec{\mathbf{v}} = \lambda^2\vec{\mathbf{v}}$.

Jeśli $B\vec{\mathbf{v}} = \mu\vec{\mathbf{v}}$, to mnożąc tę równość stronami przez B^{-1} otrzymujemy $\vec{\mathbf{v}} = \mu B^{-1}\vec{\mathbf{v}}$. Ponieważ założyliśmy, że B^{-1} istnieje, więc $B\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, bo $B^{-1}\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \neq \vec{\mathbf{v}}$. Stąd wynika, że $\mu \neq 0$, zatem z równości $\vec{\mathbf{v}} = \mu B^{-1}\vec{\mathbf{v}}$ wynika, że $B^{-1}\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{v}}$, a to oznacza, że jeśli μ jest wartością własną macierzy B, to μ^{-1} jest wartością własną macierzy B^{-1}. Wobec tego wartościami własnymi macierzy A^{-2} są liczby $\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{53-35i\sqrt{1119}}$ i $2\frac{1}{53+35i\sqrt{1119}}$. Odpowiadają im te same wektory, które odpowiadały odpowiednim wartościom własnym macierzy A. $\boxtimes$

Uwaga

Końcówka rozumowania daje pełne uzasadnienie stwierdzenia: wartościami własnymi macierzy A^n są liczby postaci λ^n, gdzie λ jest wartością własną macierzy A w przypadku, w którym wartości własne macierzy A są parami różne. Przypadek wartości własnych wielokrotnych wymaga dodatkowego rozumowania, którego nie podajemy. ■

Zadanie 4.

Znaleźć wszystkie funkcje x, dla których

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 96te^{2t} + 96t^3e^{-2t} + 96e^{-2t} + 96t + 96 \quad \text{i} \quad x(0) = 56\,.$$

Ile jest takich funkcji?

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne $0 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ ma jeden pierwiastek podwójny, mianowicie 2. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym równania $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$ jest $(c_1 + c_2t)e^{2t}$.

Rozwiążemy równanie $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 96te^{2t}$. Ponieważ prawa strona jest quasiwielomianem stopnia 1 o wykładniku 2 i liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, więc istnieje rozwiązanie postaci $(at^3 + bt^2)e^{2t}$. Mamy

$$\big[(at^3+bt^2)e^{2t}\big]''-4\big[(at^3+bt^2)e^{2t}\big]'+4\big[(at^3+bt^2)e^{2t}\big]=(6at+2b)e^{2t}\,.$$

Wynika stąd, że dla każdego t musi zachodzić równość $6at+2b=96t$. Oznacza to, że $b=0$ i $a=\frac{96}{6}=16$.

Teraz kolej na równanie $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=96(t^3+1)e^{-2t}$. Prawa strona jest quasiwielomianem stopnia 3 o wykładniku -2, wykładnik nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, zatem istnieje rozwiązanie tego równania postaci $(at^3+bt^2+ct+d)e^{-2t}$. Podstawiając do równania otrzymujemy

$$\big[(at^3+bt^2+ct+d)e^{-2t}\big]''-4\big[(at^3+bt^2+ct+d)e^{-2t}\big]'+4\big[(at^3+bt^2+ct+d)e^{-2t}\big]=96(t^3+1)e^{-2t},$$

co nie wygląda zachęcająco. Oznaczmy więc: $w(t)=at^3+bt^2+ct+d$ i przeprowadźmy rachunki nie troszcząc się **na razie** o to czym jest $w(t)$. Mamy $\big[w(t)e^{-2t}\big]''-4\big[w(t)e^{-2t}\big]'+4w(t)e^{-2t}=$ $=\big[\{w'(t)-2w(t)\}e^{-2t}\big]'-4\{w'(t)-2w(t)\}e^{-2t}+4w(t)e^{2t}=\{w''(t)-8w'(t)+16w(t)\}e^{-2t}$. Musi więc być spełniona równość $w''(t)-8w'(t)+16w(t)=96t^3+96$ i to dla każdej liczby t. Przepiszmy tę równość w postaci $96t^3+96=16at^3+(16b-24a)t^2+(16c-16b+6a)t+16d-8c+2b$. Wynika stąd, że $16a=96$, czyli $a=\frac{96}{16}=6$; $16b-24a=0$, czyli $b=\frac{24}{16}a=9$; $16c-16b+6a=0$, czyli $c=\frac{16b-6a}{16}=b-\frac{3}{8}a=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$; $16d-8c+2b=96$, czyli $d=\frac{4c-b+48}{8}=\frac{33}{4}$.

I ostatnie równanie $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=96t+96$. Prawa strona jest quasiwielomianem stopnia 1 o wykładniku 0, liczba 0 nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, zatem istnieje rozwiązanie postaci $at+b$. Mamy $(at+b)''-4(at+b)'+4(at+b)=4at+4(b-a)$. Stąd $4a=96$, czyli $a=24$ i $4(b-a)=96$, zatem $b-a=24$, więc $b=48$.

Ostatecznie funkcja $x(t)=24t+48+(6t^3+9t^2+\frac{27}{4}t+\frac{33}{4})e^{-2t}+16t^3e^{2t}+(c_1+c_2t)e^{2t}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=96te^{2t}+96t^3e^{-2t}+96e^{-2t}+96t+96$. Musimy jeszcze zatroszczyć się o równość $56=x(0)$. Z wzoru, który otrzymaliśmy wynika, że $x(0)=48+\frac{33}{4}+c_1$. Wobec tego $c_1=56-48-\frac{33}{4}=-\frac{1}{4}$. Wynika stąd, że dla każdej liczby $t\in\mathbb{R}$ zachodzi równość $x(t)=24t+48+(6t^3+9t^2+\frac{27}{4}t+\frac{33}{4})e^{-2t}+16t^3e^{2t}+(-\frac{1}{4}+c_2t)e^{2t}$, c_2 oznacza tu dowolną liczbę, zatem rozwiązań jest nieskończenie wiele. ■

Zadanie 5.

Znaleźć wszystkie funkcje x, dla których

$$x''(t)-4x'(t)+13x(t)=36te^{2t}\sin(3t)+36te^{2t}+36\sin(3t)+36\cos(3t)\,.$$

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne ma postać $0=\lambda^2-4\lambda+13=(\lambda-2)^2+9$, zatem ma ono dwa pierwiastki: $2\pm3i$. Funkcja $36te^{2t}$ jest quasiwielomianem stopnia 1 z wykładnikiem 2. Liczba 2 nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, więc równanie $x''(t)-4x'(t)+13x(t)=$ $=36te^{2t}$ ma rozwiązanie postaci $(at+b)e^{2t}$. Mamy $\big[(at+b)e^{2t}\big]''-4\big[(at+b)e^{2t}\big]'+13\big[(at+b)e^{2t}\big]=$ $=\big[(at+b)e^{2t}\big]''-4\big[(at+b)e^{2t}\big]'+4\big[(at+b)e^{2t}\big]+9\big[(at+b)e^{2t}\big]=9\big[(at+b)e^{2t}\big]$ — ostatnia równość wynika z tego, że funkcja $(at+b)e^{2t}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania $y''(t)-4y'(t)+4y(t)=0$

(zob. rozwiązanie poprzedniego zadania). Musi więc być spełniona równość $9(at+b)=36t$, czyli $a=4$, $b=0$.

Teraz zajmiemy się równaniem $x''(t)-4x'(t)+13x(t)=36te^{2t}\sin(3t)$. Funkcja $36te^{2t}\sin(3t)$ nie jest quasiwielomianem, ale $36te^{2t}\sin(3t)=\mathrm{Im}\big(36te^{(2+3i)t}\big)$. Najpierw znajdziemy rozwiązanie szczególne równania pomocniczego $x''(t)-4x'(t)+13x(t)=36te^{(2+3i)t}$. Ponieważ liczba $2+3i$ jest *jednokrotnym* pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc istnieje rozwiązanie postaci $(at^2+bt)e^{(2+3i)t}$, $a,b\in\mathbb{C}$. Oznaczmy $w(t)=at^2+bt$. Mamy

$$\big[w(t)e^{(2+3i)t}\big]''-4\big[w(t)e^{(2+3i)t}\big]'+13\big[w(t)e^{(2+3i)t}\big]=$$
$$=\big[w''(t)+2(2+3i)w'(t)+(2+3i)^2w(t)-4w'(t)-4(2+3i)w(t)+13w(t)\big]e^{(2+3i)t}=$$
$$=\big[w''(t)+6iw'(t)\big]e^{(2+3i)t}.$$

Wobec tego mamy równanie $12iat+6ib+2a=36t$. Z niego wynika, że $a=\frac{36}{12i}=-3i$ oraz $6ib+2a=0$, czyli $b=-\frac{2a}{6i}=\frac{6i}{6i}=1$. Wobec funkcja $(-3it^2+t)e^{(2+3i)t}$ jest szczególnym rozwiązaniem równania $x''(t)-4x'(t)+13x(t)=36te^{(2+3i)t}$. Jej część urojona, czyli funkcja $\mathrm{Im}\big((-3it^2+t)e^{(2+3i)t}\big)=-3t^2e^{2t}\cos(3t)+te^{2t}\sin(3t)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania, które chcieliśmy rozwiązać, czyli: $x''(t)-4x'(t)+13x(t)=36te^{2t}\sin(3t)$.

Kolej na równanie $x''(t)-4x'(t)+13x(t)=36\sin(3t)+36\cos(3t)$. Mamy $\cos(3t)=\mathrm{Re}\left(e^{3it}\right)$ oraz $\sin(3t)=\mathrm{Re}\big(-ie^{3it}\big)$, zatem $36\sin(3t)+36\cos(3t)=\mathrm{Re}\big[36(1-i)e^{3it}\big]$, a więc można zająć się najpierw równaniem $x''(t)-4x'(t)+13x(t)=36(1-i)e^{3it}$. Prawa strona jest quasiwielomianem stopnia 0 z wykładnikiem $3i$, liczba $3i$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, zatem znajdzie się rozwiązanie postaci ae^{3it}, $a\in\mathbb{C}$. Mamy

$$\big[ae^{3it}\big]''-4\big[ae^{3it}\big]'+13\big[ae^{3it}\big]=\big[-9a-12ai+13a\big]e^{3it}=4a\big[1-3i\big]e^{3it}.$$

Stąd $4a\big[1-3i\big]=36(1-i)$, czyli $a=\frac{9(1-i)}{1-3i}=\frac{9(1-i)(1+3i)}{1+9}=\frac{9(2+i)}{5}$. Wobec tego poszukiwanym rozwiązaniem szczególnym równania zespolonego jest $\frac{9(2+i)}{5}e^{3it}$, a równania rzeczywistego $\mathrm{Re}\big[\frac{9(2+i)}{5}e^{3it}\big]=\frac{18}{5}\cos(3t)-\frac{9}{5}\sin(3t)$.

Możemy w końcu podać rozwiązanie ogólne naszego równania:

$$x(t)=4te^{2t}-3t^2e^{2t}\cos(3t)+te^{2t}\sin(3t)+\tfrac{18}{5}\cos(3t)-\tfrac{9}{5}\sin(3t)+c_1e^{2t}\cos(3t)+c_2e^{2t}\sin(3t).$$

Dwa ostatnie składniki to rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $x''(t)-4x'(t)+13x(t)=0$ w postaci rzeczywistej ($c_1,c_2\in\mathbb{R}$). Można też napisać rozwiązanie tego równania w postaci zespolonej: $C_1e^{(2+3i)t}+C_2e^{(2-3i)t}$, $C_1,C_2\in\mathbb{C}$. Zespoloną postać można uważać za nieco ogólniejszą, ale jeśli dopuścimy w „rzeczywistej" postaci współczynniki nierzeczywiste, to otrzymujemy te same funkcje w obu przypadkach tylko nieco inaczej zapisane. ■