Matematyka A1, egzamin, 17 czerwca 2005 — rozwiązania

Mam nadzieję, że nie ma tu błędów poza jakimiś literówkami, od których uwolnić się jest bardzo trudno. Zachęcam do obejrzenia rozwiązań zadań z egzaminu dla matematyki A.

Zadanie **0.**

Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których $z\bar{z}+|z^2+1|=1$. Narysować X na płaszczyźnie.

Rozwiązanie 1.

Mamy $z\bar{z}=|z|^2=|z^2|$. $|z^2+1|$ to odległość punktów z^2 oraz -1, $|z^2|$ to odległość punktu z^2 od punktu 0. Suma odległości punktu z^2 od punktów -1 oraz 0 ma być równa 1, więc odległości punktu -1 od punktu 0. Z nierówności trójkąta (znanej ze szkoły podstawowej) wynika, że punkt z^2 musi się znajdować na odcinku o końcach -1 oraz 0. Oczywiście $z=0$ spełnia ten warunek. Dalej $z\neq 0$. Musi być $0<|z|\leq 1$ i $\mathrm{Arg}(z^2)=\pi$. Wobec tego $\mathrm{Arg}(z)=\frac{\pi}{2}$ lub $\mathrm{Arg}(z)==\frac{1}{2}(\pi+2\pi)=\frac{\pi}{2}+\pi$. Wynika stąd, że liczby z leżą na odcinku zawartym w osi urojonej, którego długość równa jest 2 i którego środkiem jest 0. Końcami tego odcinka są liczby $-i$ oraz i. $\boxtimes$

Rozwiązanie 2.

Niech $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$. Wtedy $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2$. Zachodzi też równość $|z^2+1|=|x^2+2ixy-y^2+1|=\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+(2xy)^2}=\sqrt{(x^2+y^2)^2+2x^2-2y^2+1}$. Wobec tego $(x^2+y^2)^2+2x^2-2y^2+1=(1-x^2-y^2)^2=1-2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2$. Stąd $2x^2=-2x^2$, czyli $x=0$. Wracając do wyjściowego równania otrzymujemy $y^2+\sqrt{(-y^2+1)^2}=1$, czyli $\sqrt{(-y^2+1)^2}=1-y^2$. Ponieważ $\sqrt{(-y^2+1)^2}\geq 0$, więc $1-y^2\geq 0$, czyli $|y|\leq 1$. Wobec tego rozwiązaniem jest fragment osi urojonej odpowiadający liczbom $y\in\big[-1,1\big]$. Bez trudu stwierdzamy, że jest to zbiór opisany w końcu rozwiązania pierwszego. ■

Zadanie 1.

Znaleźć wszystkie lokalne ekstrema funkcji f, jeśli dla każdego $(x,y)\in\mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(x,y)=x^2y^5(8-x-y).$$

Rozwiązanie.

Funkcja może mieć lokalne ekstrema jedynie w punktach, w których jej gradient, czyli wektor $\nabla f=\mathrm{grad}\ f=\big[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\big]=\big[2xy^5(8-x-y)-x^2y^5, 5x^2y^4(8-x-y)-x^2y^5\big]$ jest zerowy, czyli gdy $2xy^5(8-x-y)-x^2y^5=0$ i $5x^2y^4(8-x-y)-x^2y^5=0$. Równości te są spełnione w trzech przypadkach $x=0$ lub $y=0$ lub $x\neq 0\neq y$ i $2(8-x-y)-x=0$ i $5(8-x-y)-y=0$. Z łatwością stwierdzamy, że w trzecim przypadku spełniona musi być równość $y=\frac{5}{2}x$. Podstawiając tę równość np. do pierwszego z dwóch ostatnich równań otrzymujemy $0=2(8-x-\frac{5}{2}x)-x=16-8x$, czyli $x=2$ i wobec tego $y=5$.

Jest więc wielu kandydatów na lokalne ekstrema (czyli punktów krytycznych funkcji f):

punkty postaci $(0,y)$, punkty postaci $(x,0)$ i punkt $(2,5)$.

Mamy $f(0,y)=0$ dla każdej liczby $y\in\mathbb{R}$. Niech $0<y<8$, $|u|,|v|<\frac{8-y}{2}$ i $v<y$. Wynika stąd, że $8-(0+u)-(y+v)>0$, zatem $f(0+u,y+v)=u^2(y+v)^5(8-y-u-v)\geq 0$, zatem w punkcie $(0,y)$ funkcja f ma lokalne minimum niewłaściwe. Takie samo rozumowanie przekonuje nas o tym, że jeśli $y<0$, $|u|,|v|<\frac{8-y}{2}$ i $|v|<|y|$, to $f(0+u,y+v)=u^2(y+v)^5(8-y-u-v)\leq 0$, a to oznacza, że w punkcie $(0,y)$ mamy lokalne maksimum niewłaściwe. Analogicznie wykazujemy, że jeśli $y>8$, to wartości funkcji f w punktach dostatecznie bliskich punktowi $(0,y)$ są niedodatnie, a to oznacza, że w punkcie $(0,y)$ funkcja f ma lokalne maksimum niewłaściwe.

W taki sam sposób stwierdzamy, że w punktach postaci $(x,0)$, $x\neq 0$ funkcja nie ma lokalnych ekstremów: y^5 zmienia znak w punkcie 0, zatem w pobliżu punktu $(x,0)$ funkcja przyjmuje wartości różnych znaków.

W ten sposób wyjaśniliśmy kwestię lokalnych ekstremów we wszystkich punktach krytycznych z wyjątkiem $(0,8)$, $(8,0)$, $(0,0)$ i $(2,5)$. Mamy $f(x,8)=x^2\cdot 8^5\cdot(8-x-8)=-8^5\cdot x^3$. Wyrażenie to zmienia znak w punkcie 0: dla $x<0$ mamy $f(x,0)>0=f(0,8)$ a dla $x>0$ — $f(x,0)<0=f(0,8)$. Wynika stąd, że w punkcie $(0,8)$ funkcja f lokalnego ekstremum nie ma.

Mamy też $f(t,t)=t^2\cdot t^5\cdot(8-t-t)=t^7(8-2t)$. Ponieważ wyrażenie $t^7(8-2t)$ zmienia znak w punkcie $t=0$, więc funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $(0,0)$.

Wykażemy, że funkcja f nie ma w punkcie $(8,0)$ lokalnego ekstremum. Zachodzi równość $f(8+t,t^2)=(8+t)^2t^{10}(8-8-t-t^2)=(8+t)^2t^{11}(-1-2t)$. Dla $t>0$ prawdziwa jest nierówność $f(8+t,t^2)<0=f(8,0)$, więc w punkcie $(8,0)$ funkcja nie ma lokalnego minimum. Jeśli $-\frac{1}{2}<t<0$, to $f(8+t,t^2)>0=f(8,0)$, zatem w punkcie $(8,0)$ funkcja nie ma lokalnego maksimum.*

Kolej na punkt $(2,4)$. Teraz zrobimy, to co wielu studentów lubi najbardziej: zastosujemy twierdzenie nie męcząc się analizą sytuacji. Mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\big(2xy^5(8-x-y)-x^2y^4\big)=2(8-y)y^5-6xy^5=-2y^5(3x+y-8),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\big(2xy^5(8-x-y)-x^2y^5\big)=80xy^4-15x^2y^4-12xy^5=-xy^4(15x+12y-80),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\big(5x^2y^4(8-x-y)-x^2y^5\big)=20x^2y^3(8-x)-30x^2y^4=-10x^2y^3(2x+3y-16).$$

Stąd wynika, że $D^2f(2,5)=\begin{pmatrix}-6\cdot 5^5 & -4\cdot 5^5\\ -4\cdot 5^5 & -24\cdot 5^4\end{pmatrix}$.

Ponieważ $-6\cdot 5^5<0$ i $(-6\cdot 5^5)(-24\cdot 5^4)-(-4\cdot 5^5)(-4\cdot 5^5)=16\cdot 5^9(9-5)>0$, więc w tym punkcie funkcja ma lokalne maksimum.$\boxtimes$

Ostatni fragment można zastąpić rozumowaniem, w którym drugie pochodne się nie pojawiają.

* Czytelnik może zadać sobie pytanie: skąd wiadomo, że należy zająć się punktami postaci $(8+t,t^2)$? Odpowiedź jest bardzo prosta. Ponieważ $f(8,0)=0$, więc autor rozwiązania zbadał znak funkcji w zależności od argumentu (łatwe!), a potem wybrał parabolę ($y=(8-x)^2$), na której są punkty obszaru na którym funkcja jest dodatnia i punkty obszaru, na którym funkcja jest ujemna, akurat punkt $(8,0)$ leży na brzegu obydwóch obszarów.

Funkcja f jest ciągła. Trójkąt T o wierzchołkach $(0,8)$, $(0,0)$ i $(8,0)$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, zatem w jakimś punkcie trójkąta T funkcja f przyjmuje największą spośród wartości przyjmowanych w punktach zbioru T. Jasne jest, że na obwodzie trójkąta funkcja się zeruje, a wewnątrz jest dodatnia, zatem największa wartość musi być przyjęta w jakimś punkcie wewnętrznym. W tym punkcie gradient musi być wektorem zerowym. Jest tylko jeden kandydat: $(2,5)$, zatem w tym punkcie funkcja f ma największą wartość. Wobec tego w tym punkcie ma maksimum lokalne. Oczywiście poza trójkątem T funkcja przyjmuje dowolnie duże wartości, np. $f(-10,10) = (-10)^2 \cdot 10^5 \cdot (7+10-10) = 70\,000\,000 > 12\,500 = 2^2 \cdot 5^5 \cdot (8-2-5) = f(2,5)$. ■

Zadanie 2.

Niech $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(2.1) Znaleźć macierz A taką, że

$$A\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{18}(\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}\,.$$

(2.2) Znaleźć $A\vec{\mathbf{w}}$.

(2.3) Sprawdzić, że jeśli wektor $\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$, to również wektor $A\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$.

(2.4) Sprawdzić, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}}$ zachodzi równość $\|A\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\|$.

(2.5) Niech $\vec{\mathbf{x}}$ oznacza wektor prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Znaleźć kosinus kąta między wektorami $\vec{\mathbf{x}}$ i $A\vec{\mathbf{x}}$.

(2.6) Sprawdzić, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to $|\lambda| = 1$.

Rozwiązanie

Mamy $\vec{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z$ oraz $\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ y & z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} \right) = (2z-2y, 2x-z, y-2x)$.

Stąd $A\vec{\mathbf{x}} = \frac{x+2y+2z}{18}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 2z-2y \\ 2x-z \\ y-2x \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 10x+(2+6\sqrt{3})y+(2-6\sqrt{3})z \\ (2-6\sqrt{3})x+13y+(4+3\sqrt{3})z \\ (2+6\sqrt{3})x+(4-3\sqrt{3})y+13z \end{pmatrix}$. Wynika stąd, że

$$A = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 10 & 2+6\sqrt{3} & 2-6\sqrt{3} \\ 2-6\sqrt{3} & 13y & 4+3\sqrt{3} \\ 2+6\sqrt{3} & 4-3\sqrt{3} & 13z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{18} & \frac{2+6\sqrt{3}}{18} & \frac{2-6\sqrt{3}}{18} \\ \frac{2-6\sqrt{3}}{18} & \frac{13}{18} & \frac{4+3\sqrt{3}}{18} \\ \frac{2+6\sqrt{3}}{18} & \frac{4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}.$$

Znaleźliśmy macierz A.

Mamy $A\vec{\mathbf{w}} = \frac{1}{18} \cdot (1^1 + 2^2 + 2^2)\vec{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{w}}$.

Niech $\vec{\mathbf{x}}$ będzie wektorem prostopadłym do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Oznacza to, że $\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0$. Mamy więc $A\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{18} \cdot 0 \cdot \vec{\mathbf{w}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}$. Otrzymany wektor jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$, bo jest sumą dwóch wektorów prostopadłych do wektora $\vec{\mathbf{w}}$ ($\vec{\mathbf{x}}$ z założenia; $\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}$ też, bo iloczyn wektorowy jest prostopadły do obydwóch czynników). Wykazaliśmy 2.3

Sprawdzimy, że zachodzi 2.4. Zaczniemy od przypadku $\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0$. W tym przypadku $A\vec{\mathbf{x}} = {=}\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}$, przy czym wektory $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}$ i $\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}$ są prostopadłe. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $\|A\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \|\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \|\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{4}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{3}{36}\|\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{4}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{1}{12}\|\vec{\mathbf{w}}\|^2\cdot\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 =$ $=\frac{1}{4}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \frac{9}{12}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2$ — skorzystaliśmy z tego, że $\|\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{w}}\|\cdot\|\vec{\mathbf{x}}\|$, co jest konsekwencją prostopadłości wektorów $\vec{\mathbf{w}}$ i $\vec{\mathbf{x}}$: w tym przypadku równoległobok rozpięty przez te wektory staje się prostokątem. Niech teraz $\vec{\mathbf{x}}$ oznacza dowolny, niekoniecznie prostopadły do $\vec{\mathbf{w}}$, wektor. Niech $t = \frac{1}{18}\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}}$, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{x}} - t\vec{\mathbf{w}}$. W tej sytuacji $\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}} - t\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = 0$. Wobec tego wektor $t\vec{\mathbf{w}}$ jest rzutem prostopadłym wektora $\vec{\mathbf{x}}$ na prostą wyznaczoną przez wektor $\vec{\mathbf{w}}$. Mamy więc $A\vec{\mathbf{x}} = A(t\vec{\mathbf{w}}+\vec{\mathbf{v}}) = tA\vec{\mathbf{w}} + A\vec{\mathbf{v}} = t\vec{\mathbf{w}} + A\vec{\mathbf{v}}$. Ponieważ wektor $\vec{\mathbf{v}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$, więc również wektor $A\vec{\mathbf{v}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Wiemy też, że $\|A\vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|$. Wobec tego wektory $\vec{\mathbf{x}}$ i $A\vec{\mathbf{x}}$ zostały przedstawione w postaci sum prostopadłych wektorów o tych samych długościach. Mają więc taką samą długość.

Znów zakładamy, że $\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = 0$. Wtedy $\vec{\mathbf{x}}\cdot A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}\cdot(\frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{\mathbf{x}}\|\cdot\|A\vec{\mathbf{x}}\|$, zatem poszukiwany kosinus równy jest $\frac{1}{2}$. Wykazaliśmy 2.5.

Zajmiemy się 2.6. Jeśli $A\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, to $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \|A\vec{\mathbf{v}}\| = \|\lambda\vec{\mathbf{v}}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{\mathbf{v}}\|$, a ponieważ $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, więc $|\lambda| = 1$. Rozwiązanie zostało zakończone.⊠

Uwaga:

Można oczywiście rozwiązać to zadanie korzystając w jawny sposób z tego, jak wygląda macierz A. Niektórzy zdający tak robili. Jest metoda poprawna, ale nie polecam jej, bo można się trochę pogubić w rachunkach. Przed przystąpieniem do obliczeń warto chwilę pomyśleć, czy rzeczywiście są one niezbędne! ⊠

Komentarz.

Wektorowi $\vec{\mathbf{x}}$ przypisujemy wektor $A\vec{\mathbf{x}}$. Mamy więc określone przekształcenie przestrzeni w siebie. Punkty prostej przechodzącej przez punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$ i przez punkt $(1,2,2)$ przy tym przekształceniu nie ruszają się. Bez większych trudności możemy stwierdzić, że opisane przekształcenie to obrót wokół prostej $2x = y = z$ o taki kąt α, że $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli o kąt 60°. ■

Zadanie 3.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $A = \begin{pmatrix} 16 & -5 & -10 & -12 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 7 & 6 \\ 16 & 5 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

Rozwiązanie

Obliczymy $\begin{vmatrix} 16-\lambda & -5 & -10 & -12 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 7-\lambda & 6 \\ 16 & 5 & 10 & 14-\lambda \end{vmatrix}$. Ponieważ w drugim wierszu zero pojawia się trzy razy, więc najprościej będzie rozwinąć wyznacznik względem tego wiersza:

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & -5 & -10 & -12 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 7-\lambda & 6 \\ 16 & 5 & 10 & 14-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 16-\lambda & -10 & -12 \\ 9 & 7-\lambda & 6 \\ 16 & 10 & 14-\lambda \end{vmatrix} =$$

$=(2-\lambda)\big[(16-\lambda)(7-\lambda)(14-\lambda)-9\cdot 10\cdot 12-16\cdot 10\cdot 6+12\cdot 16\cdot(7-\lambda)-6\cdot 10\cdot(16-\lambda)+9\cdot 10\cdot(14-\lambda)\big]=$ $=(2-\lambda)[-\lambda^3+37\lambda^2-656\lambda+1172]=(2-\lambda)^2(\lambda^2-35\lambda+586)$. Wynika stąd, że wartościami własnymi macierzy A są $\lambda_{1,2}=2$ oraz $\lambda_3=\frac{1}{2}(35-i\sqrt{1119})$, $\lambda_4=\frac{1}{2}(35+i\sqrt{1119})$. W celu znalezienia wektorów własnych należy znaleźć niezerowe rozwiązania układów równań liniowych. Zaczniemy $\lambda_{1,2}=2$. W tym przypadku układ wygląda tak

$$\begin{cases} 14x_1-5x_2-10x_3-12x_4=0,\\ \ \ 0x_1+0x_2+\ \ 0x_3+\ \ 0x_4=0,\\ \ \ 9x_1+3x_2+\ \ 5x_3+\ \ 6x_4=0,\\ 16x_1+5x_2+10x_3+12x_4=0.\end{cases}$$

Widzimy więc, że drugie równanie jest spełnione przez wszystkie czwórki liczb (x_1,x_2,x_3,x_4). Dodając pierwsze równanie do czwartego otrzymujemy $30x_1=0$, czyli $x_1=0$. Biorąc pod uwagę równość $x_1=0$ odejmujemy równanie czwarte od podwojonego trzeciego. Otrzymujemy równość $x_2=0$. Jeśli $x_1=0=x_2$, to wszystkie równania (poza drugim) są równoważne równaniu $5x_3+6x_4=0$. Przykładowym rozwiązaniem jest $(0,0,6,-5)$. Jasne jest, że każde inne rozwiązanie rozwiązywanego układu otrzymać można przez pomnożenie wektora $(0,0,6,-5)$ przez odpowiednio dobraną liczbę. Wobec tego wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej 2 są wektory postaci $(0,0,6t,-5t)$, gdzie t oznacza dowolną liczbę różną od 0.

Teraz zajmiemy się wartością własną λ_3. Układ równań wygląda teraz tak

$$\begin{cases} (-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{1119}}{2})x_1-5x_2-10x_3-12x_4=0,\\ 0x_1+(-\frac{31}{2}+i\frac{\sqrt{1119}}{2})x_2+0x_3+\ \ 0x_4=0,\\ 9x_1+3x_2+(-\frac{21}{2}+i\frac{\sqrt{1119}}{2})x_3+6x_4=0,\\ 16x_1+5x_2+10x_3+(-\frac{7}{2}+i\frac{\sqrt{1119}}{2})x_4=0.\end{cases}$$

Musi więc być spełniona równość $x_2=0$. Dodając do pierwszego równania trzecie pomnożone przez 2 otrzymujemy równość, w której występują jedynie niewiadome x_1 i x_3, co pozwala napisać $x_3=\frac{1}{130}(-3+2i\sqrt{1119})x_1$. Podstawiając otrzymaną wartość w miejsce x_3 w równaniu czwartym otrzymujemy równanie, w którym występują jedynie x_1 i x_4. Stąd $x_4=-\frac{1}{104}(11-3i\sqrt{1119})x_1$. By otrzymać konkretny wektor własny wystarczy teraz podstawić dowolną, różną od 0 liczbę w miejsce x_1. Innymi słowy wszystkie wektory własne odpowiadające wartości własnej $\frac{1}{2}(35-i\sqrt{1119})$ są równoległe do wektora $\big[520,0,-12+8i\sqrt{1119},-55+15i\sqrt{1119}\,\big]$. Wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej $\frac{1}{2}(35+i\sqrt{1119})$ nie ma potrzeby zajmować się: po prostu sprzęgamy wektory odpowiadające wartości własnej $\frac{1}{2}(35-i\sqrt{1119})$, metoda działa, bo wyjściowa macierz jest rzeczywista.

Macierz A^{-2} to macierz odwrotna do macierzy A^2. Wartościami własnymi macierzy A^2 są liczby 2^2, 2^2, $\big(\frac{1}{2}(35-i\sqrt{1119})\big)^2=\frac{1}{2}(53-35i\sqrt{1119})$ oraz $\big(\frac{1}{2}(35+i\sqrt{1119})\big)^2=\frac{1}{2}(53+35i\sqrt{1119})$, a wektory własne są takie same jak w przypadku macierzy A. Wynika to stąd, że jeśli $A\vec{\mathbf{v}}=\lambda\vec{\mathbf{v}}$, to

$A^2\vec{\mathbf{v}} = A(A\vec{\mathbf{v}}) = A(\lambda\vec{\mathbf{v}}) = \lambda A\vec{\mathbf{v}} = \lambda^2\vec{\mathbf{v}}$.

Jeśli $B\vec{\mathbf{v}} = \mu\vec{\mathbf{v}}$, to mnożąc tę równość stronami przez B^{-1} otrzymujemy $\vec{\mathbf{v}} = \mu B^{-1}\vec{\mathbf{v}}$. Ponieważ założyliśmy, że B^{-1} istnieje, więc $B\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, bo $B^{-1}\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \neq \vec{\mathbf{v}}$. Stąd wynika, że $\mu \neq 0$, zatem z równości $\vec{\mathbf{v}} = \mu B^{-1}\vec{\mathbf{v}}$ wynika, że $B^{-1}\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{v}}$, a to oznacza, że jeśli μ jest wartością własną macierzy B, to μ^{-1} jest wartością własną macierzy B^{-1}. Wobec tego wartościami własnymi macierzy A^{-2} są liczby $\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{53-35i\sqrt{1119}}$ i $2\frac{1}{53+35i\sqrt{1119}}$. Odpowiadają im te same wektory, które odpowiadały odpowiednim wartościom własnym macierzy A. $\boxtimes$

Uwaga Końcówka rozumowania daje pełne uzasadnienie stwierdzenia: wartościami własnymi macierzy A^n są liczby postaci λ^n, gdzie λ jest wartością własną macierzy A w przypadku, w którym wartości własne macierzy A są parami różne. Przypadek wartości własnych wielokrotnych wymaga dodatkowego rozumowania, którego nie podajemy. ■

Zadanie 4.

Rozwiązać równanie $x''(t) + 4x'(t) = \cos(\nu t)$. Dla jakich liczb $\nu \in \mathbb{R}$ wszystkie rozwiązania tego równania są funkcjami **ograniczonymi** na całej prostej?

Przypomnienie: funkcja $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywana jest ograniczoną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba nieujemna M taka, że $|g(x)| \leq M$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne wygląda tak $\lambda^2 + 4\lambda = 0$, więc jego pierwiastkami są $\lambda_1 = 0$ oraz $\lambda_2 = -4$. Mamy $\cos(\nu t) = \mathrm{Re}\,(e^{\nu it})$. Liczba νi nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, zatem równanie $x''(t) + 4x'(t) = e^{\nu it}$ ma rozwiązanie postaci $ae^{\nu it}$. Podstawiając tę funkcję w miejsce x w ostatnim równaniu otrzymujemy $-a\nu^2e^{\nu it} + 4a\nu ie^{\nu it} = e^{\nu it}$. Stąd wynika, że $a = \frac{1}{4\nu i - \nu^2} = -\frac{4i+\nu}{\nu(16+\nu^2)}$. Wobec tego funkcja $\mathrm{Re}\left[-\frac{4i+\nu}{\nu(16+\nu^2)}e^{\nu it}\right] = -\frac{1}{\nu(16+\nu^2)}[\nu\cos(\nu t) - 4\sin(\nu t)]$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $x''(t) + 4x'(t) = \cos(\nu t)$. Wynika stąd, że jego rozwiązaniem ogólnym jest funkcja $\frac{1}{\nu(16+\nu^2)}[-\nu\cos(\nu t) + 4\sin(\nu t)] + c_1 + c_2e^{-4t}$. Jest ona ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_2 = 0$, bowiem $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-4t} = +\infty$, a drugi składnik, czyli funkcja $\frac{1}{\nu(16+\nu^2)}[-\nu\cos(\nu t) + 4\sin(\nu t)] + c_1$ jest ograniczony niezależnie od wyboru parametru c_1. Oznacza to, że nie istnieje wartość ν, dla której wszystkie rozwiązania równania $x''(t) + 4x'(t) = \cos(\nu t)$ są ograniczone. ■

Zadanie 5.

Znaleźć wszystkie funkcje x, dla których

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 36e^{3t} + 36e^{-3t} + 36e^{3t}\cos(3t) + 36t^2 .$$

Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne wygląda tak $0 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$, więc jego pierwiastkiem **podwójnym** jest liczba 3. Liczby -3, $3 + 3i$ ani 0 nie są pierwiastkami tego równania. Wobec tego równanie ma rozwiązanie postaci $at^2e^{3t} + be^{-3t} + c_1e^{3t}\cos 3t + c_2e^{3t}\sin 3t + d_1t^2 + d_2t + d_3$.

Mamy $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = (D-3)^2x(t)$. Zachodzi równość $(D-3)\big[w(t)e^{3t}\big] = w'(t)e^{3t}$. Z niej wynika, że $(D-3)^2w(t)e^{3t} = w''(t)e^{3t}$. Mamy więc znaleźć funkcję w taką, że $w''(t) = 36$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Przykładem takiej funkcji jest $18t^2$ (inne różnią się od nie o wielomian stopnia pierwszego lub zerowego). Oznacza to, że $a = 18$, czyli że funkcja $18t^2e^{3t}$ jest rozwiązaniem równania $(D-3)^2[x(t)] = 36e^{3t}$.

Zachodzi oczywista równość $(D-3)[e^{-3t}] = -6e^{-3t}$. Z niej wynika, że $(D-3)^2[e^{-3t}] = 36e^{-3t}$. Jasne jest więc, że $b = 1$, czyli że funkcja e^{-3t} jest rozwiązaniem równania $(D-3)^2[x(t)] = 36e^{-3t}$.

Zajmiemy się wyrażeniem $c_1e^{3t}\cos 3t + c_2e^{3t}\sin 3t$. Mamy $(D-3)[e^{3t}\cos 3t] = -3e^{3t}\sin 3t$ oraz $(D-3)[e^{3t}\sin 3t] = 3e^{3t}\cos 3t$. Stąd wynikają wzory $(D-3)^2[e^{3t}\cos 3t] = -9e^{3t}\cos 3t$ oraz $(D-3)^2[e^{3t}\sin 3t] = -9e^{3t}\sin 3t$, więc należy przyjąć $c_1 = -4$ oraz $c_2 = 0$, a to oznacza, że rozwiązaniem szczególnym równania $(D-3)^2[x(t)] = 36e^{3t}\cos(3t)$ jest funkcja $-4e^{3t}\cos(3t)$.

Trzeba w końcu zająć się równaniem $(D-3)^2[x(t)] = 36t^2$. Mamy

$$(D-3)[d_1t^2 + d_2t + d_3] = (2d_1t + d_2) - 3(d_1t^2 + d_2t + d_3) = -3d_1t^2 + (2d_1 - 3d_2)t + (d_2 - 3d_3).$$

Stosując uzyskany wzór jeszcze raz do prawej strony otrzymanej równości otrzymujemy

$$(D-3)^2[d_1t^2 + d_2t + d_3] = 9d_1t^2 + (-12d_1 + 9d_2)t + (2d_1 - 6d_2 + 9d_3).$$

Teraz już jest łatwo. Muszą być spełnione równości: $9d_1 = 36$, czyli $d_1 = 4$; $-12d_1 + 9d_2 = 0$, czyli $d_2 = \frac{4}{3}d_1 = \frac{16}{3}$ i $2d_1 - 6d_2 + 9d_3 = 0$, czyli $d_3 = \frac{1}{9}(-2d_1 + 6d_2) = \frac{8}{3}$. Oznacza to, ze funkcja $4t^2 + \frac{16}{3}t + \frac{8}{3}$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $(D-3)^2[x(t)] = 36t^2$.

Z tych wszystkich obliczeń wnioskujemy, że rozwiązaniem ogólnym równania

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 36e^{3t} + 36e^{-3t} + 36e^{3t}\cos(3t) + 36t^2$$

jest funkcja $x(t) = (C_1 + C_2t)e^{3t} + 18t^2e^{3t} + e^{-3t} - 4e^{3t}\cos(3t) + 4t^2 + \frac{16}{3}t + \frac{8}{3}$, gdzie C_1, C_2 oznaczają dwie dowolne liczby (rzeczywiste, jeśli interesują nas rozwiązania rzeczywiste; zespolone, jeśli szukamy rozwiązań zespolonych.) ■