

Matematyka A, klasówka, 13 czerwca 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 50 lub 90 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

11. Niech $A = (3, 2, 1)$, $B = (2, 2, 1)$, $C = (0, 0, 0)$, $D = (1, 1, 1)$.

a. Znaleźć na odcinku AB punkt E taki, że $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EB}$.

b. Znaleźć równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora \overrightarrow{AB} przechodzącej przez punkt E .

c. Znaleźć jakikolwiek **niezerowy** wektor prostopadły do obu wektorów \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} .

d. Znaleźć równanie płaszczyzny równoległej do prostej AB , na której leżą punkty C i D .

e. Znaleźć odległość punktu C od prostej AB .

f. Znaleźć objętość czworościanu $ABCD$.

12. Napisać definicję wartości własnej i wektora własnego. Znaleźć wartości własne macierzy

$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i wektory własne im odpowiadające oraz wartości własne i wektory własne im odpowiadające macierzy A^{-1} oraz A^4 .

22. Znaleźć wszystkie funkcje x , zmiennej t , dla których

$$x''(t) + 4x'(t) + 8x(t) = 4e^{-2t} + 4te^{-2t} + 40e^{2t} + 4e^{-2t} \cos(2t) - 8t^2 + 2.$$

23. Znaleźć wszystkie funkcje x , zmiennej t , dla których

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 216t^2e^{3t} + 6te^{-3t} + 169 \cos(2t) + 27t^2.$$

24. Które z następujących zbiorów są przestrzeniami liniowymi rzeczywistymi lub zespolonymi:

4.1 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y^2 = 2x\}$;

4.2 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |y| = 2x\}$;

4.3 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 2x + y + 3z = 0\}$;

4.4 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + (y + z)^2 = 0\}$;

4.5 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^3 + 27y^3 = 0\}$;

4.6 zbiór wszystkich takich ciągów (z_n) liczb zespolonych, że równość $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n$ zachodzi dla $n = 0, 1, 2, \dots$;

4.7 zbiór wszystkich tych funkcji różniczkowalnych f na $(-\infty; \infty)$, dla których $f''(1) = 3f(2)$.