

Matematyka A, klasówka, 10 czerwca 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 50 lub 90 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

11. Czy istnieją liczby a, b, c, d takie, że punkty $(-1, 2)$, $(1, -2)$, $(2, 2)$, $(-3, -18)$ leżą na wykresie funkcji $ax^3 + bx^2 + cx + d$? Jeśli istnieją, to znaleźć je. W przeciwnym przypadku wykazać, że nie istnieją.

12. Niech $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Znaleźć macierz A taką, że

$$A\vec{x} = \frac{1}{9}(\vec{w} \cdot \vec{x})\vec{w} + \frac{1}{2}[\vec{x} - \frac{1}{9}(\vec{w} \cdot \vec{x})\vec{w}] + \frac{\sqrt{3}}{18}\vec{w} \times \vec{x}.$$

Znaleźć $A\vec{v}$.

Wykazać, że dla każdego wektora \vec{x} zachodzi równość $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

Wykazać, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A , to $|\lambda| = 1$.

Wykazać, że jeśli wektor \vec{x} jest prostopadły do wektora \vec{w} , to również wektor $A\vec{x}$ jest prostopadły do wektora \vec{w} .

13. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $(1, 2, 3)$ i $(3, 2, 1)$, która jest równoległa do wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

21. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Znaleźć $\det(A)$, A^{-1} i wektory własne macierzy A i macierzy A^{-1} .

22. Rozwiązać równanie $x'(t) = 3x(t) + 12te^{-3t} + 12t^2e^{3t} + 12$. Znaleźć wszystkie rozwiązania spełniające warunek $x'(0) = 0$.

23. Rozwiązać równanie $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 2e^{-2t} \sin t + 4t^2e^{-2t} \cos t + 17e^{2t} + 10t + 8$.

Informacje pożyteczne i zbędne: $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.