Matematyka A, klasówka, 24 maja 2005

Na prośbę jednej ze studentek podaję rozwiązania zadań z kolokwium z matematyki A w nadziei, że popełniłem wielu błędów.

1. Podać definicję wektora własnego i wartości własnej.

Znaleźć wartości i wektory własne (niekoniecznie rzeczywiste) macierzy A, jeśli

$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}^3$, $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$.

Wartością własną macierzy A nazywamy liczbę λ (rzeczywistą lub nie), dla której istnieje wektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ taki, że $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, wektor $\mathbf{v}$ nazywamy wektorem własnym macierzy A. Z wykładu wiadomo, że wartościami własnymi są pierwiastki równania charakterystycznego: $0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 6 \\ -10 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(8-\lambda) + 60 = \lambda^2 - 5\lambda + 36$. Rozwiązawszy to równanie kwadratowe stwierdzamy, że $\lambda_1 = \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{25 - 4\cdot 36}) = \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{119})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{119})$. Jeśli $\mathbf{v} = \binom{x}{y}$ jest wektorem własnym odpowiadającym $\frac{1}{2}(5 - i\sqrt{119})$, to

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}(5 - i\sqrt{119})\tbinom{x}{y},$$

zatem spełniona jest równość $-3x + 6y = \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{119})x$, czyli równość $y = \frac{1}{12}\big(11 - i\sqrt{119}\big)x$ (równość $-10x + 8y = \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{119})y$ jest równoważna poprzedniej, do ten układ równań **ma niezerowe rozwiązanie**, gdyż $\frac{1}{2}(5 - i\sqrt{119})$ jest wartością własną!). Jednym z odpowiadających wartości własnej $\lambda_1 = \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{119})$ wektorów jest $\mathbf{v}_1 = \binom{12}{11 - i\sqrt{119}}$. Macierz jest rzeczywista, więc sprzęgając wartość własną i wektor własny otrzymujemy drugą parę $\lambda_2 = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{119})$, $\mathbf{v}_2 = \binom{12}{11 + i\sqrt{119}}$. Wartości własnych więcej nie ma, a pozostałe wektory własne odpowiadające λ_1 otrzymujemy mnożąc wektor $\mathbf{v}_1$ przez dowolną liczbę zespoloną $\neq 0$. Analogicznie w przypadku λ_2. W przypadku macierzy $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}^3$ możemy postąpić tak, jak w przypadku macierzy $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$, ale **nie warto**. Mamy bowiem

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}^3 \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}^2 \lambda_1\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}^2 \mathbf{v}_1 =$$
$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 = \lambda_1^2 \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \lambda_1^3\mathbf{v}_1,$$

zatem λ_1^3 jest wartością własną $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}^3$, a jednym z wektorów własnych jej odpowiadających jest $\mathbf{v}_1$. Drugą wartością własną jest λ_2^3. Odpowiada jej wektor $\mathbf{v}_2$. Więcej wartości własnych macierz nie ma, bo równanie kwadratowe może mieć *co najwyżej* dwa pierwiastki.

Jedynym pierwiastkiem równania

$$0 = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 6 \\ -6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(9-\lambda) + 36 = \lambda^2 - 6\lambda + 3 = (\lambda - 3)^2$$

jest liczba 3. Współrzędne wektorów własnych spełniają układ równań: $-3x + 6y = \lambda x = 3x$, $-6x + 9y = \lambda y = 3y$, czyli równanie $x = y$. Jedyna wartością własną jest więc liczba 3. Odpowiada jej wektor własny $\binom{1}{1}$ lub jakikolwiek wektor otrzymany przez pomnożenie wektora

$\binom{1}{1}$ przez liczbę $\neq 0$.

Jeśli $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ i macierz A ma macierz odwrotną, to $\mathbf{v} = A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$, zatem $\lambda^{-1}\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{v}$, a to oznacza, że jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości λ, to jest też wektorem własnym macierzy A^{-1} odpowiadającym wartości własnej $\frac{1}{\lambda}$. Macierz $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$ ma więc jedną wartość własną, $\frac{1}{3}$, odpowiadają jej wektory własne postaci $\binom{x}{x}$, $x \neq 0$. $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$.

Uwaga: wartościami własnymi macierzy A^n dla $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ są liczby postaci λ^n, gdzie λ oznacza wartość własną macierzy A, czego dowód nie różni od podanego w szczególnych przypadkach w rozwiązaniu tego zadania. ■

2. Niech $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Sprawdzić, że wektor $\vec{\mathbf{w}} = (1,1,1)$ jest wektorem własnym macierzy A. Jakiej wartości własnej on odpowiada?

Znaleźć pozostałe wartości i wektory własne macierzy A. Wykazać, że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}}$ zachodzi równość $\|A\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\|$.

Niech $\vec{\mathbf{v}}$ będzie wektorem prostopadłym do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Wykazać, że również wektor $A\vec{\mathbf{v}}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\mathbf{w}}$. Znaleźć kosinus kąta między wektorami $\vec{\mathbf{v}}$ i $A\vec{\mathbf{v}}$

Sprawdzić, że wektory $\vec{\mathbf{w}}$, $3\vec{\mathbf{x}} - (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}$ i $\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}$ są prostopadłe oraz że dla każdego wektora $\vec{\mathbf{x}}$ zachodzi równość $A\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{6}\big[(\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} + \big(3\vec{\mathbf{x}} - (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}\big) + 3\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}\big]$.

W końcówce można ewentualnie skorzystać z tego, że $A(\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2) = A\vec{\mathbf{x}}_1 + A\vec{\mathbf{x}}_2$ oraz

$$\big[(\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2) \cdot \vec{\mathbf{w}}\big]\vec{\mathbf{w}} + 3(\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2) - \big[(\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2) \cdot \vec{\mathbf{w}}\big]\vec{\mathbf{w}} + 3\vec{\mathbf{w}} \times \vec{(}\mathbf{x}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2)$$
$$= \big\{(\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} + 3\vec{\mathbf{x}}_1 - (\vec{\mathbf{x}}_1 \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} + 3\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}_1\big\} + \big\{(\vec{\mathbf{x}}_2 \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} + 3\vec{\mathbf{x}}_2 - (\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}} + 3\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{x}}_2\big\}$$

Mamy $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+2-1 \\ -1+2+2 \\ 2-1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, więc wektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 1.

Dla znalezienia pozostałych wartości własnych rozkładamy na czynniki wielomian charakterystyczny *wiedząc już, że jednym z jego pierwiastków jest liczba* 1 *Przypominamy, że mnożenie macierzy przez liczbę polega na pomnożeniu każdego jej wyrazu przez tę liczbę; pomnożenie jednego wiersza przez np. $\frac{1}{3}$ powoduje pomnożenie wyznacznika przez $\frac{1}{3}$, jednoczesne pomnożenie dwóch wierszy powoduje pomnożenie wyznacznika przez $\frac{1}{9}$ itd.:

$$\frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2-3\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 2-3\lambda & 2 \\ 2 & -1 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (-\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Wynika stąd, że pozostałymi wartościami własnymi są liczby $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ oraz $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

Znajdujemy odpowiadające im wektory własne rozwiązując odpowiednie układy równań;

---

* 18

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})x \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})x \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z \end{cases}.$$

Rozwiążemy pierwszy układ. Mnożymy drugie równanie przez 2 i dodajemy do trzeciego: $y+2z = (1+i\sqrt{3})y+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z$ tzn. $\frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})z = i\sqrt{3}y$, więc $y = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z$. Mnożymy pierwsze równanie przez 2 i dodajemy do drugiego: $x+2y = (1+i\sqrt{3})x+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})y$. Z tej równości wynika, że $x = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})y$. Przyjmując $z = 1$ otrzymujemy wektor własny $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) \\ -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) \\ 1 \end{pmatrix}$, który odpowiada wartości $\lambda = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Ponieważ macierz jest rzeczywista, więc drugą parę otrzymujemy tak, jak w poprzednim zadaniu (czyli sprzęgając): wektor $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) \\ -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \\ 1 \end{pmatrix}$ odpowiada wartości własnej $\lambda = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$.

Niech $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Mamy $\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = x^2+y^2+z^2$ oraz $A\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x+2y-z \\ -x+2y+2z \\ 2x-y+2z \end{pmatrix}$, zatem $\|A\vec{\mathbf{v}}\|^2 = {}$ $=\frac{1}{9}\big[(2x+2y-z)^2+(-x+2y+2z)^2+(2x-y+2z)^2\big] = \frac{1}{9}\big[4x^2+4y^2+z^2+8xy-2xz-4yz+{}$ $+x^2+4y^2+4z^2-4xy-4xz+8yz+4x^2+y^2+4z^2-4xy+8xz-4yz\big] = x^2+y^2+z^2 = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2$.
W dalszym ciągu $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Prostopadłość $\vec{\mathbf{v}}$ do $\vec{\mathbf{w}}$ oznacza, że $0 = \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = x+y+z$. Z kolei $A\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = \frac{1}{3}(2x+2y-z+x+2y+2z+2x-y+2z) = x+y+z = 0$, więc następne stwierdzenia zostało uzasadnione.

Mamy $\vec{\mathbf{w}}\cdot\big(3\vec{\mathbf{x}}-(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}\big) = 3\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}}-(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})(\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}}) = 3\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{x}}-3\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = 0$. Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że wektory $\vec{\mathbf{w}}$ i $\vec{\mathbf{x}}$ są prostopadłe do $\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$, a stąd wynika prostopadłość wektorów $\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}$ i $3\vec{\mathbf{x}}-(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}$ (wektor prostopadły do wszystkich składników sumy jest prostopadły do sumy).

Mamy $A\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{w}}$ oraz $\frac{1}{6}\big[((\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}})+\big(3\vec{\mathbf{w}}-(\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}\big)+3\vec{\mathbf{w}}\times\mathbf{w}\big] = \frac{1}{6}(\vec{\mathbf{w}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{\mathbf{w}}$, a to oznacza, że równość, którą mieli Państwo uzasadnić nie jest prawdziwa. Można ją bez trudu poprawić: $A\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{6}\big[2(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}+\big(3\vec{\mathbf{x}}-(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}\big)+3\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\big] = \frac{1}{6}\big[(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{w}}+3\vec{\mathbf{x}}+3\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{x}}\big]$. Ta poprawiona równość ma miejsce dla $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{w}}$, to już sprawdziliśmy. Wystarczy teraz udowodnić ją dla jeszcze dwóch wektorów wzajemnie prostopadłych i prostopadłych do $\mathbf{w}$, bo każdy wektor w przestrzeni można zapisać w postaci sumy trzech wzajemnie prostopadłych wektorów o danych kierunkach. „Przypadkowo” wybrane wektory to $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Są one prostopadłe do $\vec{\mathbf{w}}$, również wzajemnie prostopadłe. Mamy $A\vec{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $A\vec{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mamy dalej $\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i $\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Z tych równości wynika już teza.

Zauważmy jeszcze, że jeśli wektor $\vec{\mathbf{x}}$ jest prostopadły do $\vec{\mathbf{w}}$, to $A\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{x}}$, a ponieważ $\|A\vec{\mathbf{x}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\|$, więc kosinus kąta między wektorami $\vec{\mathbf{x}}$ i $A\vec{\mathbf{x}}$ równy jest $\frac{1}{2}$.

Zakończyliśmy omawianie zadania.

Po zakończeniu wypada stwierdzić, że punkt $A\vec{\mathbf{x}}$ jest obrazem punktu $\vec{\mathbf{x}}$ w obrocie o kąt $\frac{\pi}{3}$

(czyli o 60°) wokół prostej przechodzącej przez punkty $(0,0,0)$ i $(1,1,1)$. ■

3. Niech $w=1+i$. Znaleźć $|w|$, $\mathrm{Arg}\, w$, w^4 oraz $\overline{w}^6$.

Rozwiązać (w $\mathbb{C}$) równanie $z^3+z^2+3z-5=0$.

Mamy $|w|^2 = w\bar{w} = (1+i)(1-i) = 1^2-i^2 = 2$. Wobec tego $1+i = \sqrt{2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = {=}\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$. Stąd $w^4 = \sqrt{2}^4\big[\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}\big] = -4$. Analogicznie $\overline{w}^6 = {=}\ \sqrt{2}^6\big[\cos\frac{6\pi}{4}-i\sin\frac{6\pi}{4}\big] = 8(-1)(-i) = 8i$. Oczywiście można też skorzystać z tego, że $\overline{w}^6 = \overline{w}^4\cdot\overline{w}^2 = \overline{-4}\cdot\overline{2i} = (-4)(-2i) = 8i$.

Zajmiemy się równaniem. $0 = z^3+z^2+3z-5 = (z-1)(z^2+2z+5) = (z-1)\big[(z+1)^2+4\big]$, zatem pierwiastkami są liczby 1, $-1+2i$, $-1-2i$.

4. Rozwiązać równanie $x'(t)+2x(t) = e^{-t}+e^{-2t}+5\cos t$. Znaleźć wszystkie rozwiązania tego równania spełniające warunek $x(0)=2$.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $x'(t)+2x(t)=0$ to ce^{-2t}. Znajdziemy kolejno rozwiązania szczególne równań $x'(t)+2x(t)=e^{-t}$, $x'(t)+2x(t)=e^{-2t}$ oraz $x'(t)+2x(t)=5e^{it}$. Ponieważ -1 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego $\lambda+2 = 0$, więc istnieje liczba C taka, że funkcja Ce^{-t} spełnia równanie $(Ce^{-t})'+2Ce^{-t} = e^{-t}$, czyli $(2-C)e^{-t}=e^{-t}$. Stąd $C=1$.

Liczba -2 **jest** pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc znajdziemy rozwiązanie równania $x'(t)+2x(t) = e^{-2t}$ w postaci Cte^{-2t}. Podstawiając do równania otrzymujemy po redukcji $Ce^{-2t} = e^{-2t}$, zatem $C=1$, co oznacza, że funkcja te^{-2t} jest rozwiązaniem szczególnym tego równania.

Ponieważ liczba i nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc uda się znaleźć liczbę C, dla której funkcja Ce^{it} jest rozwiązaniem równania $x'(t)+2x(t)=5e^{it}$. Po podstawieniu otrzymujemy $C(2+i)e^{it}=5e^{it}$, zatem $C=\frac{5}{2+i}=2-i$. Oznacza to, że funkcja $(2-i)e^{it}$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $x'+2x=5e^{it}$, zatem $\mathrm{Re}\big((2-i)e^{it}\big) = {=}\mathrm{Re}\big((2-i)(\cos t+i\sin t)\big) = 2\cos t+\sin t$ jest rozwiązaniem szczególnym równania $x'+2x = {=}5\cos t$.

Rozwiązaniem ogólnym jest więc funkcja $ce^{-2t}+e^{-t}+te^{-2t}+2\cos t+\sin t$. Ponieważ $2 = x(0) = c+1+2$, więc $c=-1$. ■

5. Rozwiązać równanie $x''(t)+2x'(t)+5x(t) = e^{-t}\big[2\cos(2t)-8t\sin(2t)\big]+5t+2+8e^t$.

Równaniem charakterystycznym jest $0 = \lambda^2+2\lambda+5 = (\lambda+1)^2+4$, zatem pierwiastkami charakterystycznymi są liczby $-1+2i$ oraz $-1-2i$. Znajdziemy kolejno rozwiązania szczególne równań $x''(t)+2x'(t)+5x(t) = 8e^t$, $x''(t)+2x'(t)+5x(t) = 5t+2$ i $x''(t)+2x'(t)+5x(t) = {=}e^{-t}\big[2\cos(2t)-8t\sin(2t)\big]$.

Rozwiązaniem pierwszego z nich będzie funkcja postaci Ce^t. Po podstawieniu otrzymujemy $8Ce^t = 8e^t$, więc $C=1$, zatem funkcja e^t jest rozwiązaniem szczególnym tego równania.

Rozwiązaniem drugiego równania jest funkcja postaci $at+b$, gdzie a,b są liczbami. Podstawiając otrzymujemy $2a+5at+5b=5t+2$. Stąd $a=1$ i $b=0$. Funkcja t jest rozwiązaniem szczególnym tego równania.

Zamiast równania $x''(t)+2x'(t)+5x(t) = e^{-t}\big[2\cos(2t)-8t\sin(2t)\big]$ rozważymy równanie $x''(t)+2x'(t)+5x(t) = 8te^{(-1+2i)t}$. Ponieważ liczba $-1+2i$ **jest** pierwiastkiem jednokrotnym równania charakterystycznego, więc rozwiązanie znajdziemy w postaci $(at^2+bt)e^{(-1+2i)t}$. Mamy $x''(t)+2x'(t)+5x(t)=[D-(-1-2i)][D-(-1+2i)]x=(D+1+2i)(D+1-2i)x$ dla każdej funkcji dwukrotnie różniczkowalnej x. Mamy

$$[(D+1+2i)(D+1-2i)]\big[(at^2+bt)e^{(-1+2i)t}\big] =$$
$$= [D+1+2i]\big[(2at+b)e^{(-1+2i)t}\big] = \big[4i(2at+b)+2a\big]e^{(-1+2i)t}.$$

Musi więc być spełniona równość $\big[4i(2at+b)+2a\big]e^{(-1+2i)t} = 8te^{(-1+2i)t}$, co oznacza, że $a=-i$, $b=\frac{1}{2}$. Funkcja

$$(-it^2+\tfrac{t}{2})e^{(-1+2i)t} = e^{-t}(-it^2+\tfrac{t}{2})(\cos(2t)+i\sin(2t)) =$$
$$= e^{-t}\Big[\big\{\tfrac{t}{2}\cos(2t)+t^2\sin(2t)\big\}+i\big\{\tfrac{t}{2}\sin(2t)-t^2\cos(2t)\big\}\Big]$$

jest rozwiązaniem równania

$$x''(t)+2x'(t)+5x(t) = 8te^{(-1+2i)t} = 8te^{-t}\cos(2t)+i8te^{-t}\sin(2t).$$

Jej część rzeczywista jest rozwiązaniem równania

$$x''(t)+2x'(t)+5x(t) = 8te^{-t}\cos(2t)$$

a urojona — równania

$$x''(t)+2x'(t)+5x(t) = 8te^{-t}\sin(2t).$$

Z przeprowadzonych obliczeń możemy też wywnioskować, że

$$[(D+1+2i)(D+1-2i)]\big[bte^{(-1+2i)t}\big] = 4ibe^{(-1+2i)t} = 4be^{-t}\big[-\sin(2t)+i\cos(2t)]$$

Wobec tego rozwiązaniem szczególnym naszego równania jest funkcja

$e^{-t}\big[t^2\cos(2t)-\frac{t}{2}\sin(2t)\big]+\frac{t}{2}e^{-t}\sin(2t) = e^{-t}t^2\cos(2t)$. ♡ Oczywiście można było to zauważyć wcześniej, bez części obliczeń, można też było przewidywać rozwiązanie w postaci rzeczywistej i sprawdzać kolejno co otrzymamy wstawiając po lewej stronie równania kolejno $e^{-t}t^2\cos(2t)$, $e^{-t}t^2\sin(2t)$, co zakończyłoby się po pierwszej serii rachunków. Wiemy, jeśli wierzą Państwo w prawdziwość twierdzeń podawanych na wykładzie, jak wyglądają rozwiązania, zatem znalazłszy je powołujemy się na twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań i kończymy działalność.

Na koniec wypada stwierdzić, że rozwiązaniem ogólnym równania jest funkcja $x(t) = e^t+t+e^{-t}\cos(2t)+c_1e^{-t}\cos(2t)+c_2e^{-t}\sin(2t)$. ■

♡ 39