

## Matematyka A, klasówka, 20 kwietnia 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 90 minut

1. Podać definicję wektora własnego i wartości własnej.

Znaleźć wartości i wektory własne macierzy  $A$ , jeśli

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}^3, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}^{-1}.$$

2. Niech  $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Sprawdzić, że wektor  $\vec{w} = (1, 1, 1)$  jest wektorem własnym macierzy  $A$ . Jakiej wartości własnej on odpowiada?

Znaleźć pozostałe wartości i wektory własne macierzy  $A$ . Wykazać, że dla każdego wektora  $\vec{x}$  zachodzi równość  $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ .

Niech  $\vec{v}$  będzie wektorem prostopadłym do wektora  $\vec{w}$ . Wykazać, że również wektor  $A\vec{v}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{w}$ . Znaleźć kosinus kąta między wektorami  $\vec{v}$  i  $A\vec{v}$

Wykazać, że dla każdego wektora  $\vec{x}$  zachodzi równość  $A\vec{x} = \frac{1}{6}[(\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w} + (3\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}) + 3\vec{w} \times \vec{x}]$ , wykazać, że wektory  $\vec{w}$ ,  $3\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$  i  $\vec{w} \times \vec{x}$  są prostopadłe.

3. Niech  $z = 1 + i$ . Znaleźć  $|z|$ ,  $\text{Arg } z$ ,  $z^4$  oraz  $\bar{z}^{2005}$ .

Rozwiązać równanie  $w^3 + w^2 + 3w - 5 = 0$ .

4. Rozwiązać równanie  $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = e^{-t} + \cos t$ . Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające warunek  $x(0) = 1 = x'(0)$ .
5. Rozwiązać równanie  $x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = e^{-t} \cos(2t)$ .