

Matematyka A1, klasówka, 25 kwietnia 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 90 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

1. Znaleźć wszystkie funkcje x , zmiennej t , dla których $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = t^2e^t + te^{2t} + \sin 3t + 1$.
2. Znaleźć wszystkie funkcje x , zmiennej t , dla których $x''(t) + 8x'(t) + 16x(t) = te^{4t} + t^2e^{-4t} + \cos(2t)$.
3. Niech f oznacza funkcję różniczkowalną określoną na półprostej $(0, \infty)$ przyjmującą jedynie dodatnie wartości.

Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\mathbf{p} = (t, f(t))$ i punkt \mathbf{q} , w którym ta styczna przecina pionową oś układu współrzędnych.

Znaleźć pole $S(t)$ trapezu o wierzchołkach $\mathbf{0} = (0, 0)$, $(t, 0)$, \mathbf{p} , \mathbf{q} w zależności od t .

Znaleźć wszystkie funkcje f , dla których $S(t) = 3$ dla wszystkich $t > 0$.

4. Które z następujących zbiorów są przestrzeniami liniowymi rzeczywistymi:
 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = 2x\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |y| = 2|x|\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + 2y + 3z = 0\}$,
 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + 2y + 3z = 10\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x + 2y)^2 = 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 6xy + 9y^2 = 0\}$.
5. Które z następujących zbiorów są przestrzeniami liniowymi rzeczywistymi lub zespolonymi:
 - (6.1) zbiór tych funkcji ciągłych f na $(-\infty, \infty)$, dla których $f(25) = 0$;
 - (6.2) zbiór tych ciągów (z_n) liczb zespolonych, dla których $z_{n+2} = z_{n+1} + z_n + 25$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$;
 - (6.3) zbiór tych funkcji różniczkowalnych f na $(-\infty, \infty)$, dla których $f'(1) = f(2)$.