Matematyka A, klasówka, 22 kwietnia 2005

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 90 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $A = (1, -2, 7)$, $B = (5, 2, 3)$, $C = (0, 0, 0)$, $D = (1, 1, 1)$.

a. Znaleźć na odcinku AB punkt E taki, że $\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{AE}$.

b. Znaleźć równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $\overrightarrow{AB}$ przechodzącej przez punkt E.

c. Znaleźć jakikolwiek **niezerowy** wektor prostopadły do obu wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$.

d. Znaleźć równanie płaszczyzny równoległej do prostej CD, na której leżą punkt A i B.

e. Znaleźć odległość punktu B od prostej CD.

2. Znaleźć wszystkie rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -1; \\ 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 11x_4 = 1; \\ 2x_1 + 9x_2 - 7x_3 - 13x_4 = -1. \end{cases}$$

3. Czy istnieją liczby a, b, c, d takie, że punkty $(-1, -2)$, $(0, -2)$, $(1, 0)$, $(2, 10)$ leżą na wykresie funkcji $ax^3 + bx^2 + cx + d$? Jeśli istnieją, to znaleźć je. W przeciwnym przypadku wykazać, że nie istnieją.

4. Znaleźć A^{-1} i B^{-1}, jeśli $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Znaleźć $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Niech $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Rozstrzygnąć dla jakich liczb λ istnieje wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ taki, że $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

6. Niech $A = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$. Znaleźć A^2, A^3, A^{2005}.