Egzamin poprawkowy dodatkowy, matematyka A, 12 marca 2005 — 150 minut

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia udowodnione na zajęciach.

Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce.

W lewym górnym rogu każdej kartki należy umieścić numer swego indeksu, pod nim swoje nazwisko, imię, pod nimi numer grupy ćwiczeniowej.

L. Podać definicję liczby $\log_a x$, czyli logarytmu liczby x przy podstawie a. Jakie warunki muszą spełniać liczby a oraz x, by można było określić $\log_a x$?

Wykazać, że $\log 2 < \frac{1}{3}(4\log 3 - 1)$ i $5\log 3 < 8\log 2$. Znaleźć $\log \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt[3]{10000}}$, $\log\left(10 \cdot \sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[5]{10}}\right)$.

T. Podać definicję sinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność $|\sin t| \geq \frac{1}{2}$ i zaznaczyć fragmenty okręgu $x^2 + y^2 = 1$ złożone z punktów $(\cos t, \sin t)$, gdzie t oznacza liczbę spełniającą rozwiązaną nierówność.

P. Podać definicję pochodnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ w punkcie 12. Znaleźć $f'(12)$, jeśli

$$f(x) = (x-12)^3 \sin\left(e^{\cos(\ln(1+x))}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{1+x^2}\right).$$

Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\big(12, f(12)\big)$

1. Niech $A = \{(x,y)\colon\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \ \text{ i } \ \sin(2x) \leq y \leq \sin x\}$ będzie obszarem ograniczonym z góry przez wykres funkcji $\sin x$, z dołu przez wykres funkcji $\sin(2x)$, a z boków — przez odpowiednie proste pionowe. Znaleźć pole obszaru A. (*Uwaga: zbiór A nie ma punktów wspólnych z prostą $x = -\frac{8\pi}{21}$*).

2. Znaleźć na wykresu funkcji $y = x^3$ punkt Q znajdujący się najbliżej punktu $B = (-4, 0)$.

3. Wykazać, że dla dowolnej liczby $x > 0$ zachodzi nierówność $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.

4. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3+\sin x)}{\ln(x^2+\sqrt{5+\cos x})}$ i takie liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$, że granica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - (a+bx^2+cx^4)}{x^5} = 0$.

5. Znaleźć całkę nieoznaczoną $\int x^2 \sin(x^2)\,dx$ oraz całkę oznaczoną $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^2 \sin(x^2)\,dx$.

6. Niech $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)(x-3)}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Mamy $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 12x + 11}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2}}$ oraz $f''(x) = -\dfrac{6x^2 - 24x + 26}{9\sqrt[3]{(x-1)^5(x-2)^5(x-3)^5}}$.

$f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \frac{6\pm\sqrt{3}}{3}$. Druga pochodna nie ma pierwiastków rzeczywistych. W jakich punktach funkcja f jest różniczkowalna (tzn. ma skończoną pochodną pierwszego rzędu)? Znaleźć przedziały, na których funkcja f maleje, na których rośnie, na których jest wypukła, na których jest wklęsła. Obliczyć granice funkcji f przy $x \longrightarrow \infty$ oraz przy $x \longrightarrow -\infty$ oraz granice f' w końcach przedziałów, na których funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć asymptoty funkcji f.
Na podstawie uzyskanych informacji naszkicować wykres funkcji f.

inf. *Informacje przeróżne (pożyteczne lub zbędne):*

$\log_{10} x = \log x$; $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1 + x \leq e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$; $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, gdy $\frac{\pi}{2} > x > 0$;

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$; $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

$3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$, $3^8 = 6561$, $3^9 = 19683$, $3^{10} = 59049$, $3^{11} = 177147$

$2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{11} = 2048$, $2^{14} = 16384$, $2^{16} = 65536$