Egzamin, matematyka A, 21 lutego 2005 — 150 minut

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia udowodnione na zajęciach.

Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce.

W lewym górnym rogu każdej kartki należy umieścić numer swego indeksu, pod nim swoje nazwisko, imię, pod nimi numer grupy ćwiczeniowej.

L. Podać definicję liczby $\log_a x$, czyli logarytmu liczby x przy podstawie a. Jakie warunki muszą spełniać liczby a oraz x, by można było określić $\log_a x$?

Wykazać, że $\log 4 < \log 3 + 0{,}125$ i $\log 3 < 1{,}6 \log 2$. Znaleźć $\log \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$, $\log\left(10 \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{10}}\right)$.

T. Rozwiązać nierówność $\operatorname{tg}(2t) \geq \operatorname{ctg}(t)$. Zaznaczyć na okręgu $x^2+y^2=1$ odpowiedni zbiór, tj. złożony z punktów $(x,y)=(\cos t, \sin t)$, gdzie t oznacza liczbę spełniającą nierówność $\operatorname{tg}(2t) \geq \operatorname{ctg}(t)$.

1. Znaleźć na paraboli $y = \frac{x^2}{4}$ punkty: P znajdujący się najbliżej punktu $A=(0,1)$, Q znajdujący się najbliżej punktu $B=(0,2)$ i R znajdujący się najbliżej punktu $C=(0,3)$.

2. Wykazać, że jeśli $x,y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$, to $\left|\sin x \cos x - \sin y \cos y\right| < |x-y|$.

3. Niech $A = \{(x,y)\colon\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ i $\sin(2x) \geq y \geq \sin x\}$ będzie obszarem ograniczonym z dołu przez wykres funkcji $\sin x$, z góry przez wykres funkcji $\sin(2x)$, a z boków — przez odpowiednie proste pionowe. Znaleźć pole obszaru A. (*Uwaga: zbiór A nie ma punktów wspólnych z prostą $x = \frac{8\pi}{21}$*).

4. *Znaleźć* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x \ln x + \sin x)}{\ln(x^2 + \sqrt{5+\cos x})}$ *i takie liczby $a,b,c \in \mathbb{R}$, że granica* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - (a+bx^2+cx^4)}{x^5} = 0$.

5. *Znaleźć całkę nieoznaczoną* $\int x^3 \cos(x^2)\,dx$ *oraz całkę oznaczoną* $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2)\,dx$.

6. *Niech* $f(x) = \frac{3}{14}x^{14/3} + \frac{3}{11}x^{11/3} - \frac{9}{8}x^{8/3} - \frac{3}{5}x^{5/3} + 3x^{2/3}$.

Zachodzą wtedy równości: $f'(x) = \frac{(x+1)(x+2)(1-x)^2}{\sqrt[3]{x}}$ *oraz*

$f''(x) = \frac{11(x-1)(x-x_0)(x^2+px+q)}{3\sqrt[3]{x^4}}$, *gdzie* $-1{,}56939 < x_0 < -1,56938$ *i* $p^2 < 4q$.

Funkcja nie ma asymptot.

a. *Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest rosnąca i przedziały, na których jest malejąca;*
przedziały, na których funkcja f jest wypukła i przedziały, na których jest wklęsła.

b. *Znaleźć punkty, w których funkcja f nie ma pochodnej.*

c. *W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema?*

d. *Znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji f.*

e. *Znaleźć granice jednostronne funkcji f w $\pm\infty$.*

f. *Znaleźć granice jednostronne funkcji f' (pochodnej funkcji f) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.*

G. Naszkicować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.

---

inf. *Informacje przeróżne (pożyteczne lub zbędne):*

$\log_{10} x = \log x$; $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1 + x \leq e^x$ *dla* $x \in \mathbb{R}$; $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, *gdy* $\frac{\pi}{2} > x > 0$;

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$; $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

$3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$, $3^8 = 6561$, $3^9 = 19683$, $3^{10} = 59049$, $3^{11} = 177147$

$2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{11} = 2048$, $2^{14} = 16384$, $2^{16} = 65536$