Klasówka poprawkowa, matematyka A, 17 lutego 2005

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia udowodnione na zajęciach.

Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. **Każdą kartkę należy podpisać swoim nazwiskiem, imieniem, numerem grupy ćwiczeniowej i numerem swego indeksu**

Pierwsze kolokwium — zadania 11,12,13; drugie lub trzecie — zadania 21 – 26

---

11. Podać definicję logarytmu liczby x przy podstawie a. Jakie warunki muszą spełniać liczby a, x, by można było zdefiniować $\log_a x$? Obliczyć: $\log_{10} \frac{1}{\sqrt{1000}}$, $\log_5 \frac{5^5}{\sqrt{5}}$, $\log_{0{,}25} 2$, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$.

12. Podać definicję sinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność $1 > |\sin t| \geq \frac{1}{2}$ i zaznaczyć odpowiednie fragmenty okręgu $x^2 + y^2 = 1$ (przyjąwszy, że $x = \cos t$, $y = \sin t$).

13. Znaleźć granice $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2n^3+15n^2}{\sqrt{n^3}+2\sqrt{n^4}+3\sqrt{n^5}+\sqrt{4n^6+1}}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2n}{n^2+1}\right)^n$

21. Znaleźć liczby a, b, c takie, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-(a+bx+cx^2)}{x^2} = 0$, następnie — granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-(a+bx+cx^2)}{x^3}$.

22. Niech $f(t) = c\cos\left(\omega t\sqrt{13}\right)+d\sin\left(\omega t\sqrt{13}\right)+\sin t$ dla $t \in \mathbb{R}$. Obliczyć $f'(t)$ i $f''(t)$. Znaleźć wszystkie trójki liczb $\omega, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzi równość

$$f''(t) + 13f(t) + 12\sin t = 0\,.$$

23. Znaleźć granice $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt[3]{x+\sin x}\right)$.

24. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2}$ na półprostej otwartej $(2, +\infty)$ lub wykazać, że ta funkcja na półprostej $(2, \infty)$ najmniejszej wartości nie ma.

25. Znaleźć całkę nieoznaczoną $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$, a następnie całkę oznaczoną niewłaściwą $\int_{-1}^{+1} x^3 e^{-x^2}\,dx$.

26. Niech $f(x) = (3-x)\sqrt[3]{\frac{(x^2-9)^2}{(2-x)^2}}$ dla wszystkich $x \neq 2$. Zachodzą równości

$$f'(x) = \frac{5}{3}x(x-1)\sqrt[3]{\frac{(3-x)^2}{(2-x)^5(x+3)}}\,, \qquad f''(x) = \frac{10(x^4-2x^3-14x^2+54x-27)}{9\sqrt[3]{(x-2)^8(x+3)^4(3-x)}}$$

dla tych wszystkich liczb $x \in \mathbb{R}$, dla których prawe strony wzorów mają sens. Zachodzi równość $x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 54x - 27 = (x-x_1)(x-x_2)(x^2+px+q)$, gdzie $x_1 \approx -4{,}37$ i $x_2 \approx 0{,}6$ i $p^2 < 4q$.

Funkcja nie ma asymptot poziomych, ani ukośnych.

a. Znaleźć przedziały,

na których funkcja f jest rosnąca i przedziały, na których funkcja f jest malejąca;

na których ta funkcja jest wypukła i przedziały, na których jest wklęsła.

b. Znaleźć punkty, w których funkcja f nie ma pierwszej pochodnej.

c. W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema?

d. Znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji f.

e. Znaleźć granice jednostronne funkcji f w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

f. Znaleźć granice jednostronne funkcji f' (pochodnej funkcji f) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

Naszkicować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.

inf. *Informacje przeróżne (pożyteczne lub zbędne):*

$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1 + x \leq e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$; $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, gdy $\frac{\pi}{2} > x > 0$;

$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$; $\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.