Egzamin, matematyka A, 1 lutego 2005 — rozwiązania

Mam nadzieję, że tu nie ma zbyt wielu błędów, jeszcze sprawdzę ten tekst w środę. Jeśli ktoś czytając natknie się na niezrozumiały tekst proszę o list elektroniczny, telefon lub wizytę.

Dodatkowe konsultacje: czwartek (10 lutego) 10:15 -12, piątek (11 lutego) 11:00 -12:30, sobota (16 lutego) 16:00 -18:00.

L. Podać definicję liczby $\log_a x$, czyli logarytmu liczby x przy podstawie a. Jakie warunki muszą spełniać liczby a oraz x, by można było określić $\log_a x$?

Wykazać, że $\frac{3+\log 2}{7} < \log 3 < \frac{4+9\log 2}{9}$. Znaleźć $\log\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$, $\log_2\frac{1}{8}$, $\log\left(10\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{\sqrt{10}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}\right)$

Rozw. Logarytmem liczby $x>0$ przy podstawie $a\in(0,\infty)$, $a\neq 1$ nazywamy taką liczbę $y\in\mathbb{R}$, że $a^y = x$, czyli $a^{\log_a x} = x$.

$\frac{3+\log 2}{7} < \log 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $10^{3+\log 2} < 3^7$, a ponieważ $10^{3+\log 2} = 2000$ i $3^7 = 2187$, więc nierówność jest prawdziwa. $\log 3 < \frac{4+9\log 2}{9}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3^9 < 10^{4+9\log 2}$, a ponieważ $3^9 = 19683$ i $10^{4+9\log 2} = 5120000$, więc nierówność jest prawdziwa.

$\log\frac{1}{\sqrt[3]{10}} = -\frac{1}{3}$, bo $10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{10^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

$\log_2\frac{1}{8} = -3$, bo $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

$\log\left(10\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{\sqrt{10}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}\right) = \log\left(10\cdot 10^{1/2}\cdot 10^{1/4}\cdot 10^{1/8}\right) = 10^{1+1/2+1/4+1/4} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$.

T. Rozwiązać nierówność $\mathrm{tg}(2t)\geq\mathrm{ctg}(3t)$. Zaznaczyć na okręgu $x^2+y^2=1$ odpowiedni zbiór, tj. złożony z punktów $(x,y)=(\cos t,\sin t)$, gdzie t oznacza liczbę spełniającą nierówność $\mathrm{tg}(2t)\geq\mathrm{ctg}(3t)$.

Rozw. Nierówność $\mathrm{tg}(2t)\geq\mathrm{ctg}(3t)$ równoważna jest temu, że

$0 \geq \mathrm{ctg}(3t)-\mathrm{tg}(2t) = \frac{\cos(3t)}{\sin(3t)} - \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} = \frac{\cos(3t)\cos(2t)-\sin(2t)\sin(3t)}{\sin(3t)\cos(2t)} = \frac{\cos(3t+2t)}{\sin(3t)\cos(2t)} = \frac{\cos(5t)}{\sin(3t)\cos(2t)}$.

Ta nierówność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $0\geq\cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$ i $\sin(3t)\neq 0\neq\cos(2t)$. Iloczyn trzech liczb jest ujemny wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z nich jest ujemna a pozostałe dwie dodatnie lub wszystkie trzy są ujemne. Zauważmy, że $\cos(2t)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k taka, że $2t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, czyli $t=(2k+1)\frac{\pi}{4}$. Dalej $\sin(3t)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita m taka, że $3t=m\pi$, czyli $t=m\frac{\pi}{3}$ i wreszcie $\cos(5t)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita n taka, że $5t=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, czyli $t=(2n+1)\frac{\pi}{10}$. Łatwo można zauważyć, że otrzymane trzy warunki wzajemnie się wykluczają, co oznacza, że jeśli jeden z trzech czynników przyjmuje wartość 0, to pozostałe są różne od 0. Oczywiste jest również to, że każdy z czynników $\cos(5t)$, $\sin(3t)$ i $\cos(2t)$ zmienia znak przy przejściu przez swój pierwiastek. Wobec tego iloczyn $\cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$ zmienia znak w każdym z punktów postaci $(2n+1)\frac{\pi}{10}$, $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ i $m\frac{\pi}{3}$. Funkcja $\cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$ jest oczywiście okresowa, a jej okresem (najmniejszym dodatnim) jest liczba π:
$\cos\big(5(t+\pi)\big)\sin\big(3(t+\pi)\big)\cos\big(2(t+\pi)\big) = \big(-\cos(5t)\big)\big(-\sin(3t)\big)\big(\cos(2t)\big) = \cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$.
Z tego co napisaliśmy wynika natychmiast, że funkcja $\cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$ jest niedodatnia na każdym z przedziałów $\left[\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{10},\frac{3\pi}{4}\right]$ oraz $\left[\frac{9\pi}{10},\pi\right]$; w pozostałych punktach przedziału $(0,\pi]$ funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie. Nierówność $\mathrm{tg}(2t)\geq\mathrm{ctg}(3t)$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita j taka, że spełniona jest jedna z pięciu podwójnych nierówności $\frac{\pi}{10}+j\pi\leq t<\frac{\pi}{4}+j\pi$, $\frac{3\pi}{10}+j\pi\leq t<\frac{\pi}{3}+j\pi$, $\frac{\pi}{2}+j\pi<t<\frac{2\pi}{3}+j\pi$, $\frac{7\pi}{10}+j\pi\leq t<\frac{3\pi}{4}+j\pi$, $\frac{9\pi}{10}+j\pi\leq t<\pi+j\pi$. Na okręgu jednostkowym zaznaczyć należy końce dziesięciu łuków rozłącznych pozostawiając dziesięć niezaznaczonych łuków (luk) między nimi. Zaczynamy od domknięto–otwartej luki długości $\frac{\pi}{10}$. Następnie łuk domknięto–otwarty długości $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{10}$, luka domknięto–otwarta długości $\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{4}$, łuk domknięto–otwarty długości $\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{10}$, luka domknięta długości $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$, łuk otwarty długości

$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$, luka domknięto–otwarta długości $\frac{7\pi}{10} - \frac{2\pi}{3}$, łuk domknięto–otwarty długości $\frac{3\pi}{4} - \frac{7\pi}{10}$, luka domknięto–otwarta długości $\frac{9\pi}{10} - \frac{3\pi}{4}$ i wreszcie łuk domknięto–otwarty długości $\pi - \frac{9\pi}{10}$. Ciąg dalszy to oczywista konsekwencja okresowości, więc nie ma potrzeby kontynuować tej wyliczanki. ■

1. Znaleźć na paraboli $y = \frac{x^2}{4}$ punkt P znajdujący się najbliżej punktu $A = (2, 5)$. Znaleźć kąt między odcinkiem AP i prostą styczną do paraboli w punkcie P.

Rozw. Niech $f(x) = |AP|^2 = (x-2)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 5\right)^2$. Mamy

$$f'(x) = 2 \cdot (x-2) + 2 \cdot \left(\frac{x^2}{4} - 5\right) \cdot 2 \cdot \frac{x}{4} = \frac{1}{4}\left(x^3 - 12x - 16\right).$$

Bez trudu stwierdzamy, że spośród dzielników liczby -16 pierwiastkami wielomianu $x^3 - 12x - 16$ są liczby -2 oraz 4. Wobec tego wielomian ten jest podzielny przez $\big(x-(-2)\big)\big(x-4\big) = x^2 - 2x - 8$. Stąd bez trudu otrzymujemy rozkład $x^3 - 12x - 16 = (x+2)^2(x-4)$. Jasne jest, że jeśli $x \in (4, \infty)$, to $f'(x) > 0$, jeśli $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 4)$, to $f'(x) < 0$, zatem na półprostej $(-\infty, 4]$ funkcja f jest ściśle malejąca, a na półprostej $[4, \infty)$ — ściśle rosnąca. Wynika stąd, że najmniejszą wartością tej funkcji jest $f(4) = (4-2)^2 + \left(\frac{4^2}{4} - 5\right)^2 = 5$. Wobec tego punkt $P = \left(4, \frac{4^2}{4}\right) = (4, 4)$ jest punktem paraboli leżącym najbliżej punktu $A = (2, 5)$.

Ponieważ pochodna funkcji $\frac{x^2}{4}$ w punkcie 4 równa jest 2, więc równanie stycznej do paraboli w punkcie $(4, 4)$ ma postać $y = 2(x-4) + 4 = 2x - 4$. Na tej prostej leży też punkt $Q = (2, 0)$. Mamy $|QA|^2 - |QP|^2 - |PA|^2 = (2-2)^2 + (5-0)^2 - (4-2)^2 - (4-0)^2 - (2-4)^2 - (5-4)^2 = 0 + 25 - 4 - 16 - 4 - 1 = 0$. Oznacza to, że kąt przy wierzchołku P w trójkącie QPA jest prosty.
Wywnioskować to można również z tego, że wektor $[4-2, 4-5] = [2, -1]$ jest prostopadły do prostej $2x - y - 2 = 0$ — to fakt ogólny, udowodniony na ostatnim wykładzie w semestrze zimowym. ■

2. Wykazać, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$, to $\left|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y\right| < |x - y|$.
Rozw. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x < y$. Wtedy $\operatorname{arctg} x < \operatorname{arctg} y$. Mamy więc $\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = (\operatorname{arctg})'(c)(y-x) = \frac{1}{1+c^2}(y-x)$ dla pewnego $c \in (x, y)$. Stąd $\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x \leq$ $\leq y - x$ przy czym równość zachodzić może jedynie dla $c = 0$. Jeśli więc $y \leq 0$ lub $0 \leq x$, to nierówność jest ostra. Jeśli $x < 0 < y$, to $\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = (\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} 0) + (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} x) <$ $< (y - 0) + (0 - x) = y - x$. Dowód został zakończony. ■

3. Niech $A = \{(x, y, z)\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ \ 1 \leq z\}$ będzie częścią kuli o środku $(0, 0, 0)$ i promieniu 2 znajdującą się nad płaszczyzną poziomą $z = 1$. Znaleźć objętość zbioru A.
Rozw. Niech $P(z)$ oznacza pole przekroju kuli płaszczyzną zawierającą punkt $(0, 0, z)$, która jest równoległa do płaszczyzny zawierającej osie $\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OY}$. Ten przekrój jest kołem o promieniu $\sqrt{4 - z^2}$, zatem $P(z) = \pi(4 - z^2)$ (dla $z = 2$ koło degeneruje się do jednego punktu, tzn. koła o promieniu 0).
Objętość jest więc równa $\int_1^2 P(z)\,dz = \int_1^2 \pi(4 - z^2)\,dz = \pi(4z - \frac{1}{3}z^3)\Big|_1^2 = \pi(8 - \frac{8}{3}) - \pi(4 - \frac{1}{3}) = \frac{5\pi}{3}$.
Na tym zakończyliśmy rozwiązywanie tego skomplikowanego i niezwykle trudnego problemu:
na egzaminie średnia równa była 0,1 *punktu na* 10, *które można było uzyskać!* ■

4. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x \ln x + \sqrt{x})}{\ln(4x + 5\cos x)}$ i liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ takie, że granica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^5}$ jest skończona.

Rozw. Mamy $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x \ln x + \sqrt{x})}{\ln(4x + 5\cos x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left[x \ln x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right)\right]}{\ln\left[4x\left(1 + \frac{5\cos x}{4x}\right)\right]} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x + \ln(\ln x) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right)}{\ln x + \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{5\cos x}{4x}\right)} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right)}{\ln x}}{1 + \frac{\ln 4}{\ln x} + \frac{5\cos x}{\ln x}} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1, \quad \text{bo} \ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y} \overset{H}{=\!=} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} = 0,$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right) = \ln 1 = 0$ oraz $0 \le \left|\frac{5\cos x}{\ln x}\right| \xlongequal{x>1} \frac{5}{\ln x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Zakończyliśmy obliczanie pierwszej granicy.

Ponieważ licznik i mianownik dążą do 0, więc spróbujemy skorzystać z reguły de l'Hospitala:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-(ax+bx^2+cx^3)}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x-(a+2bx+3cx^2)}{5x^4}$. Ta granica istnieje i równa jest $+\infty$ dla $a<1$, $-\infty$ dla $a>1$. Jeśli więc mamy otrzymać granicę skończoną, to musimy przyjąć $a=1$. Wtedy w otrzymanym wyrażeniu licznik i mianownik dążą do 0, zatem możemy ponownie spróbować zastosować regułę markiza de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x-(a+2bx+3cx^2)}{5x^4} \xlongequal{a=1} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x-(2bx+3cx^2)}{5x^4} \xlongequal{H} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)-(2b+6cx)}{20x^3}.$$

Rozumując tak, jak przed chwilą stwierdzamy, że dla istnienia skończonej granicy niezbędnym warunkiem jest równość $b=0$. Wtedy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)-(2b+6cx)}{20x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)-6cx}{20x^3}$ i znów możemy stosować regułę markiza de l'Hospitala: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg}^3 x-6cx}{20x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+6\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x)-6c}{60x^2}$. Wykluczając granice nieskończoną dochodzimy do wniosku, że $2-6c=0$, czyli $c=\frac{1}{3}$. Pozostaje znaleźć granicę

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+6\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x)-2}{60x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{8\operatorname{tg}^2 x+6\operatorname{tg}^4 x}{60x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{8\operatorname{tg}^2 x}{60x^2} + \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{6\operatorname{tg}^2 x}{60x^2}\cdot\operatorname{tg}^2 x\right) = \frac{8}{60}\cdot 1^2 + \frac{6}{60}\cdot 1^2\cdot 0 = \frac{2}{15}$, bowiem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. ☒

Ten sam rezultat można osiągnąć korzystając z wzoru Taylora. Obliczając kolejne pochodne funkcji tangens otrzymujemy $(\operatorname{tg} x)' = 1+\operatorname{tg}^2 x$, $(\operatorname{tg} x)'' = 2\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x$, $(\operatorname{tg} x)^{(3)} = (2+6\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x) = 2+8\operatorname{tg}^2 x+6\operatorname{tg}^4 x$, $(\operatorname{tg} x)^{(4)} = (16\operatorname{tg} x+24\operatorname{tg}^3 x)(1+\operatorname{tg}^2 x) = 16\operatorname{tg} x + 40\operatorname{tg}^3 x + 24\operatorname{tg}^5 x$ i wreszcie $(\operatorname{tg} x)^{(5)} = (16+120\operatorname{tg}^2 x+120\operatorname{tg}^4 x)(1+\operatorname{tg}^2 x)$. Stąd wynika, że wartości kolejnych pięciu pochodnych funkcji tangens w punkcie 0 to: 1, 0, 2, 0, 16. Wobec tego piąty wielomian Taylora funkcji tangens w punkcie 0 (piąty wielomian Maclaurina) równy jest

$$x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5 = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5,$$

zatem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5)}{x^5} = 0$. Wobec tego jeśli granica $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-(ax+bx^2+cx^3)}{x^5}$ istnieje, to

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-(ax+bx^2+cx^3)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-(ax+bx^2+cx^3)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-a)x-bx^2+(\frac{1}{3}-c)x^3+\frac{2}{15}x^5}{x^5}.$$

Stąd natychmiast wynika, że jeśli ta granica jest skończona, to $a=1$, $b=0$, $c=\frac{1}{3}$ i wtedy poszukiwana granica równa jest $\frac{2}{15}$. ■

5. Znaleźć całkę nieoznaczoną $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$ oraz całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^{0} x^3 e^{-x^2}\,dx$.

Rozw. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \int \left(x^2\cdot xe^{-x^2}\right) \xlongequal[dy=-2x\,dx]{y=-x^2} = -\frac{1}{2}\int ye^y\,dy \xlongequal[\text{części}]{\text{przez}} \frac{1}{2}\left[ye^y - \int 1\cdot e^y\,dy\right] = \frac{1}{2}\left[ye^y-e^y\right]+C = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

Następnie $\int_{-\infty}^{0} x^3e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{c\to-\infty}\int_c^0 x^3e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{c\to-\infty}\left(\frac{1}{2}c^2e^{-c^2}+\frac{1}{2}e^{-c^2}-\frac{1}{2}0^2e^{-0^2}-\frac{1}{2}e^{-0^2}\right) = -\frac{1}{2}$, bo $\lim\limits_{c\to-\infty} e^{-c^2} = \lim\limits_{c\to-\infty}\frac{1}{e^{c^2}} = 0$ i $\lim\limits_{c\to-\infty} c^2e^{-c^2} = \lim\limits_{c\to-\infty}\frac{c^2}{e^{c^2}} = 0$, ten drugi wynik był na wykładzie (wielokrotnie), można go też łatwo uzyskać stosując regułę de l'Hospitala.

Zadanie było 22 stycznia, a średnia tylko $4{,}6$ na 10. Może jednak warto rozwiązać sobie zadania z poprzednich kolokwiów, egzaminów ... ■

6. Niech $f(x)=\frac{3}{14}x^{14/3}-\frac{3}{11}x^{11/3}-\frac{9}{8}x^{8/3}+\frac{3}{5}x^{5/3}+3x^{2/3}$.

Zachodzą wtedy równości: $f'(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}$ oraz

$f''(x)=\frac{11(x+1)(x-x_0)(x^2+px+q)}{3\sqrt[3]{x^4}}$, gdzie $1{,}56<x_0<1,57$ i $p^2<4q$.

Funkcja nie ma asymptot.

a. Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest rosnąca i przedziały, na których jest malejąca;
przedziały, na których funkcja f jest wypukła i przedziały, na których jest wklęsła.

b. Znaleźć punkty, w których funkcja f nie ma pochodnej.

c. W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema?

d. Znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji f.

e. Znaleźć granice jednostronne funkcji f w $\pm\infty$.

f. Znaleźć granice jednostronne funkcji f' (pochodnej funkcji f) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

G. Naszkicować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.

Rozw. Pierwiastkami pochodnej są $-1,1,2$, ale ważniejsze jest to, że zmienia ona swój znak w punktach $0,1,2$. Wobec tego: jeśli $x>2$, to $f'(x)>0$, jeśli $1<x<2$, to $f'(x)<0$, jeśli $0<x<1$, to $f'(x)>0$ i $f'(x)<0$ dla $x<0$ z wyjątkiem $x=-1$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle malejąca na półprostej $(-\infty,0]$ oraz na przedziale $[1,2]$. Na przedziale $[0,1]$ i na półprostej $[2,\infty)$ jest ściśle rosnąca. Mamy również $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=+\infty$ — ułamek jest dodatni i jego mianownik dąży do 0. Analogicznie $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=-\infty$. Wobec tego wykres funkcja f nie ma pochodnej w punkcie 0, jednostronne pochodne istnieją, ale są różne. W punkcie $(0,0)$ funkcja f ma „ostrze": lewa część wykresu jest styczna do osi $\overrightarrow{OY}$ i prawa też.

Mamy też $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, bo $f(x)$ jest sumą różnych potęg zmiennej x, współczynnik przy najwyższej z nich jest dodatni. Podobnie $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ (przyp. 14 jest liczbą parzystą).

Mamy również $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$, bo licznik ma stopień 4 i jest dodatni dla $x<0$, mianownik jest ujemny i ma mniejszy stopień $\frac{1}{3}$. W taki sam sposób stwierdzić można, że $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

Druga pochodna jest dodatnia na półprostych (x_0,∞) i $(-\infty,-1)$, ujemna — na przedziałach $(-1,0)$ i $(0,x_0)$. W punkcie 0 funkcja oczywiście drugiej pochodnej nie ma, bo nawet zdefiniować jej nie można, gdyż nie istnieje $f'(0)$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła na półprostych $(-\infty,1]$ i $[x_0,\infty)$. Na przedziałach $[-1,0]$ i $[0,x_0]$ jest ściśle wklęsła. Wobec tego punkty -1 oraz x_0 to punkty przegięcia funkcji f.

Funkcja nie jest wklęsła na przedziale $[-1,x_0]$, bo nie jest prawdą, że odcinek łączący punkty $\left(\frac{1}{7},f(\frac{1}{7})\right)$ i $\left(-\frac{1}{7},f(-\frac{1}{7})\right)$ leży **pod** *wykresem funkcji f, przeciwnie leży on nad tym wykresem, co można bez trudu sprawdzić.*

inf. *Informacje przeróżne (pożyteczne lub zbędne):*

$\log_{10}x=\log x$; $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1+x\le e^x$ dla $x\in\mathbb{R}$; $\sin x<x<\operatorname{tg}x$, gdy $\frac{\pi}{2}>x>0$;
$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$; $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$; $\cos^2x+\sin^2x=1$;
$3^4=81$, $3^5=243$, $3^6=729$, $3^7=2187$, $3^8=6561$, $3^9=19683$, $3^{10}=59049$, $3^{11}=177147$.