

Mam nadzieję, że tu nie ma zbyt wielu błędów, jeszcze sprawdzę ten tekst w środę. Jeśli ktoś czytając natknę się na niezrozumiały tekst proszę o list elektroniczny, telefon lub wizytę.

Dodatkowe konsultacje: czwartek (10 lutego) 10:15 -12, piątek (11 lutego) 11:00 -12:30, sobota (16 lutego) 16:00 -18:00.

L. Podać definicję liczby $\log_a x$, czyli logarytmu liczby x przy podstawie a . Jakie warunki muszą spełniać liczby a oraz x , by można było określić $\log_a x$?

Wykazać, że $\frac{3+\log 2}{7} < \log 3 < \frac{4+9\log 2}{9}$. Znaleźć $\log \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log \left(10 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \right)$

Rozw. Logarytmem liczby $x > 0$ przy podstawie $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$ nazywamy taką liczbę $y \in \mathbb{R}$, że $a^y = x$, czyli $a^{\log_a x} = x$.

$\frac{3+\log 2}{7} < \log 3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $10^{3+\log 2} < 3^7$, a ponieważ $10^{3+\log 2} = 2000$ i $3^7 = 2187$, więc nierówność jest prawdziwa. $\log 3 < \frac{4+9\log 2}{9}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $3^9 < 10^{4+9\log 2}$, a ponieważ $3^9 = 19683$ i $10^{4+9\log 2} = 5120000$, więc nierówność jest prawdziwa.

$\log \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = -\frac{1}{3}$, bo $10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{10^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, bo $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

$\log \left(10 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \right) = \log \left(10 \cdot 10^{1/2} \cdot 10^{1/4} \cdot 10^{1/8} \right) = 10^{1+1/2+1/4+1/8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$.

T. Rozwiązać nierówność $\operatorname{tg}(2t) \geq \operatorname{ctg}(3t)$. Zaznaczyć na okręgu $x^2 + y^2 = 1$ odpowiedni zbiór, tj. złożony z punktów $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, gdzie t oznacza liczbę spełniającą nierówność $\operatorname{tg}(2t) \geq \operatorname{ctg}(3t)$.

Rozw. Nierówność $\operatorname{tg}(2t) \geq \operatorname{ctg}(3t)$ równoważna jest temu, że

$$0 \geq \operatorname{ctg}(3t) - \operatorname{tg}(2t) = \frac{\cos(3t)}{\sin(3t)} - \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} = \frac{\cos(3t)\cos(2t) - \sin(2t)\sin(3t)}{\sin(3t)\cos(2t)} = \frac{\cos(3t+2t)}{\sin(3t)\cos(2t)} = \frac{\cos(5t)}{\sin(3t)\cos(2t)}.$$

Ta nierówność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $0 \geq \cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$ i $\sin(3t) \neq 0 \neq \cos(2t)$.

Iloczyn trzech liczb jest ujemny wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z nich jest ujemna a pozostałe dwie dodatnie lub wszystkie trzy są ujemne. Zauważmy, że $\cos(2t) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k taka, że $2t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, czyli $t = (2k+1)\frac{\pi}{4}$.

Dalej $\sin(3t) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita m taka, że $3t = m\pi$, czyli $t = m\frac{\pi}{3}$ i wreszcie $\cos(5t) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita n taka, że $5t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, czyli $t = (2n+1)\frac{\pi}{10}$.

Łatwo można zauważyć, że otrzymane trzy warunki wzajemnie się wykluczają, co oznacza, że jeśli jeden z trzech czynników przyjmuje wartość 0, to pozostałe są różne od 0. Oczywiście jest również to, że każdy z czynników $\cos(5t)$, $\sin(3t)$ i $\cos(2t)$ zmienia znak przy przejściu przez swój pierwiastek. Wobec tego iloczyn $\cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$ zmienia znak w każdym z punktów postaci $(2n+1)\frac{\pi}{10}$, $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ i $m\frac{\pi}{3}$.

Funkcja $\cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$ jest oczywiście okresowa, a jej okresem (najmniejszym dodatnim) jest liczba π : $\cos(5(t+\pi))\sin(3(t+\pi))\cos(2(t+\pi)) = (-\cos(5t))(-\sin(3t))(\cos(2t)) = \cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$.

Z tego co napisaliśmy wynika natychmiast, że funkcja $\cos(5t)\sin(3t)\cos(2t)$ jest niedodatnia na każdym z przedziałów $[\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{3}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$, $[\frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}]$ oraz $[\frac{9\pi}{10}, \pi]$; w pozostałych punktach przedziału $(0, \pi]$ funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie. Nierówność $\operatorname{tg}(2t) \geq \operatorname{ctg}(3t)$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita j taka, że spełniona jest jedna z pięciu podwójnych nierówności $\frac{\pi}{10} + j\pi \leq t < \frac{\pi}{4} + j\pi$, $\frac{3\pi}{10} + j\pi \leq t < \frac{\pi}{3} + j\pi$, $\frac{\pi}{2} + j\pi < t < \frac{2\pi}{3} + j\pi$, $\frac{7\pi}{10} + j\pi \leq t < \frac{3\pi}{4} + j\pi$, $\frac{9\pi}{10} + j\pi \leq t < \pi + j\pi$.

Na okręgu jednostkowym zaznaczyć należy końce dziesięciu łuków rozłącznych pozostawiając dziesięć niezaznaczonych łuków (łuk) między nimi. Zaczynamy od domknięto-otwartej łuki długości $\frac{\pi}{10}$.

Następnie łuk domknięto-otwarty długości $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{10}$, luka domknięto-otwarta długości $\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{4}$, łuk domknięty długości $\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{10}$, luka domknięta długości $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, łuk otwarty długości

$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$, łuk otwarty długości $\frac{3\pi}{4} - \frac{7\pi}{10}$, łuk otwarty długości $\pi - \frac{9\pi}{10}$.

$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$, luka domknięto-otwarta długości $\frac{7\pi}{10} - \frac{2\pi}{3}$, łuk domknięto-otwarty długości $\frac{3\pi}{4} - \frac{7\pi}{10}$, luka domknięto-otwarta długości $\frac{9\pi}{10} - \frac{3\pi}{4}$ i wreszcie łuk domknięto-otwarty długości $\pi - \frac{9\pi}{10}$. Ciąg dalszy to oczywista konsekwencja okresowości, więc nie ma potrzeby kontynuować tej wyliczanki. ■

1. Znaleźć na paraboli $y = \frac{x^2}{4}$ punkt P znajdujący się najbliżej punktu $A = (2, 5)$. Znaleźć kąt między odcinkiem AP i prostą styczną do paraboli w punkcie P .

Rozw. Niech $f(x) = |AP|^2 = (x-2)^2 + (\frac{x^2}{4} - 5)^2$. Mamy

$$f'(x) = 2 \cdot (x-2) + 2 \cdot (\frac{x^2}{4} - 5) \cdot 2 \cdot \frac{x}{4} = \frac{1}{4}(x^3 - 12x - 16).$$

Bez trudu stwierdzamy, że spośród dzielników liczby -16 pierwiastkami wielomianu $x^3 - 12x - 16$ są liczby -2 oraz 4 . Wobec tego wielomian ten jest podzielny przez $(x - (-2))(x - 4) = x^2 - 2x - 8$. Stąd bez trudu otrzymujemy rozkład $x^3 - 12x - 16 = (x+2)^2(x-4)$. Jasne jest, że jeśli $x \in (4, \infty)$, to $f'(x) > 0$, jeśli $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 4)$, to $f'(x) < 0$, zatem na półprostej $(-\infty, 4]$ funkcja f jest ściśle malejąca, a na półprostej $[4, \infty)$ — ściśle rosnąca. Wynika stąd, że najmniejszą wartością tej funkcji jest $f(4) = (4-2)^2 + (\frac{4^2}{4} - 5)^2 = 5$. Wobec tego punkt $P = (4, \frac{4^2}{4}) = (4, 4)$ jest punktem paraboli leżącym najbliżej punktu $A = (2, 5)$.

Ponieważ pochodna funkcji $\frac{x^2}{4}$ w punkcie 4 równa jest 2 , więc równanie stycznej do paraboli w punkcie $(4, 4)$ ma postać $y = 2(x-4) + 4 = 2x - 4$. Na tej prostej leży też punkt $Q = (2, 0)$. Mamy $|QA|^2 - |QP|^2 - |PA|^2 = (2-2)^2 + (5-0)^2 - (4-2)^2 - (4-0)^2 - (2-4)^2 - (5-4)^2 = 0 + 25 - 4 - 16 - 4 - 1 = 0$. Oznacza to, że kąt przy wierzchołku P w trójkącie QPA jest prosty.

Wynioskować to można również z tego, że wektor $[4-2, 4-5] = [2, -1]$ jest prostopadły do prostej $2x - y - 2 = 0$ — to fakt ogólny, udowodniony na ostatnim wykładzie w semestrze zimowym. ■

2. Wykazać, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$, to $|\arctg x - \arctg y| < |x - y|$.

Rozw. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x < y$. Wtedy $\arctg x < \arctg y$. Mamy więc $\arctg y - \arctg x = (\arctg)'(c)(y-x) = \frac{1}{1+c^2}(y-x)$ dla pewnego $c \in (x, y)$. Stąd $\arctg y - \arctg x \leq y - x$ przy czym równość zachodzić może jedynie dla $c = 0$. Jeśli więc $y \leq 0$ lub $0 \leq x$, to nierówność jest ostra. Jeśli $x < 0 < y$, to $\arctg y - \arctg x = (\arctg y - \arctg 0) + (\arctg 0 - \arctg x) < (y - 0) + (0 - x) = y - x$. Dowód został zakończony. ■

3. Niech $A = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 1 \leq z\}$ będzie częścią kuli o środku $(0, 0, 0)$ i promieniu 2 znajdującą się nad płaszczyzną poziomą $z = 1$. Znaleźć objętość zbioru A .

Rozw. Niech $P(z)$ oznacza pole przekroju kuli płaszczyzną zawierającą punkt $(0, 0, z)$, która jest równoległa do płaszczyzny zawierającej osie \overrightarrow{OX} i \overrightarrow{OY} . Ten przekrój jest kołem o promieniu $\sqrt{4 - z^2}$, zatem $P(z) = \pi(4 - z^2)$ (dla $z = 2$ koło degeneruje się do jednego punktu, tzn. koła o promieniu 0).

Objętość jest więc równa $\int_1^2 P(z) dz = \int_1^2 \pi(4 - z^2) dz = \pi(4z - \frac{1}{3}z^3)|_1^2 = \pi(8 - \frac{8}{3}) - \pi(4 - \frac{1}{3}) = \frac{5\pi}{3}$.

Na tym zakończyliśmy rozwiązywanie tego skomplikowanego i niezwykle trudnego problemu: *na egzaminie średnia równa była 0,1 punktu na 10, które można było uzyskać!* ■

4. Znaleźć $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x \ln x + \sqrt{x})}{\ln(4x + 5 \cos x)}$ i liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ takie, że granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^5}$ jest skończona.

Rozw. Mamy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x \ln x + \sqrt{x})}{\ln(4x + 5 \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[x \ln x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \right) \right]}{\ln \left[4 \ln x \left(1 + \frac{5 \cos x}{4 \ln x} \right) \right]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + \ln(\ln x) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \right)}{\ln x + \ln 4 + \ln \left(1 + \frac{5 \cos x}{4 \ln x} \right)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \right)}{\ln x}}{1 + \frac{\ln 4}{\ln x} + \frac{5 \cos x}{\ln x}} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1, \quad \text{bo} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} \stackrel{H}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} = 0,$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x \ln x}}\right) = \ln 1 = 0$ oraz $0 \leq \left| \frac{5 \cos x}{\ln x} \right| \stackrel{x > 1}{\underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow}} \frac{5}{\ln x} \longrightarrow 0$. Zakończyliśmy obliczanie pierwszej granicy.

Ponieważ licznik i mianownik dążą do 0, więc spróbujemy skorzystać z reguły de l'Hospitala:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - (a + 2bx + 3cx^2)}{5x^4}$. Ta granica istnieje i równa jest $+\infty$ dla $a < 1$, $-\infty$ dla $a > 1$. Jeśli więc mamy otrzymać granicę skończoną, to musimy przyjąć $a = 1$. Wtedy w otrzymanym wyrażeniu licznik i mianownik dążą do 0, zatem możemy ponownie spróbować zastosować regułę markiza de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - (a + 2bx + 3cx^2)}{5x^4} \stackrel{a=1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - (2bx + 3cx^2)}{5x^4} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - (2b + 6cx)}{20x^3}.$$

Rozumując tak, jak przed chwilą stwierdzamy, że dla istnienia skończonej granicy niezbędnym warunkiem jest równość $b = 0$. Wtedy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - (2b + 6cx)}{20x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - 6cx}{20x^3}$ i znów możemy stosować regułę markiza de l'Hospitala: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^3 x - 6cx}{20x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + 6 \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 6c}{60x^2}$. Wykluczając granicę nieskończoną dochodzimy do wniosku, że $2 - 6c = 0$, czyli $c = \frac{1}{3}$. Pozostaje znaleźć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + 6 \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 2}{60x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg}^4 x}{60x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \operatorname{tg}^2 x}{60x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6 \operatorname{tg}^2 x}{60x^2} \cdot \operatorname{tg}^2 x \right) = \frac{8}{60} \cdot 1^2 + \frac{6}{60} \cdot 1^2 \cdot 0 = \frac{2}{15},$$

bowiem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. \square

Ten sam rezultat można osiągnąć korzystając z wzoru Taylora. Obliczając kolejne pochodne funkcji tangens otrzymujemy $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $(\operatorname{tg} x)'' = 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^3 x$, $(\operatorname{tg} x)^{(3)} = (2 + 6 \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2 + 8 \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg}^4 x$, $(\operatorname{tg} x)^{(4)} = (16 \operatorname{tg} x + 24 \operatorname{tg}^3 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 16 \operatorname{tg} x + 40 \operatorname{tg}^3 x + 24 \operatorname{tg}^5 x$ i wreszcie $(\operatorname{tg} x)^{(5)} = (16 + 120 \operatorname{tg}^2 x + 120 \operatorname{tg}^4 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. Stąd wynika, że wartości kolejnych pięciu pochodnych funkcji tangens w punkcie 0 to: 1, 0, 2, 0, 16. Wobec tego piąty wielomian Taylora funkcji tangens w punkcie 0 (piąty wielomian Maclaurina) równy jest

$$x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5,$$

zatem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - (x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5)}{x^5} = 0$. Wobec tego jeśli granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^5}$ istnieje, to

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - bx^2 + (\frac{1}{3}-c)x^3 + \frac{2}{15}x^5}{x^5}.$$

Stąd natychmiast wynika, że jeśli ta granica jest skończona, to $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$ i wtedy poszukiwana granica równa jest $\frac{2}{15}$. \blacksquare

5. Znaleźć całkę nieoznaczoną $\int x^3 e^{-x^2} dx$ oraz całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^0 x^3 e^{-x^2} dx$.

Rozw. $\int x^3 e^{-x^2} dx = \int \left(x^2 \cdot x e^{-x^2} \right) \frac{y=-x^2}{dy=-2x dx} = -\frac{1}{2} \int y e^y dy \stackrel{\text{przez}}{\text{części}} \frac{1}{2} \left[y e^y - \int 1 \cdot e^y dy \right] =$
 $= \frac{1}{2} \left[y e^y - e^y \right] + C = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

Następnie $\int_{-\infty}^0 x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} c^2 e^{-c^2} + \frac{1}{2} e^{-c^2} - \frac{1}{2} 0^2 e^{-0^2} - \frac{1}{2} e^{-0^2} \right) = -\frac{1}{2},$

bo $\lim_{c \rightarrow -\infty} e^{-c^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{c^2}} = 0$ i $\lim_{c \rightarrow -\infty} c^2 e^{-c^2} = \lim_{c \rightarrow -\infty} \frac{c^2}{e^{c^2}} = 0$, ten drugi wynik był na wykładzie (wielokrotnie), można go też łatwo uzyskać stosując regułę de l'Hospitala.

Zadanie było 22 stycznia, a średnia tylko 4,6 na 10. Może jednak warto rozwiązać sobie zadania z poprzednich kolokwiów, egzaminów ... \blacksquare

6. Niech $f(x) = \frac{3}{14}x^{14/3} - \frac{3}{11}x^{11/3} - \frac{9}{8}x^{8/3} + \frac{3}{5}x^{5/3} + 3x^{2/3}$.

Zachodzą wtedy równości: $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}$ oraz

$$f''(x) = \frac{11(x+1)(x-x_0)(x^2+px+q)}{3\sqrt[3]{x^4}}, \text{ gdzie } 1,56 < x_0 < 1,57 \text{ i } p^2 < 4q.$$

Funkcja nie ma asymptot.

- a. Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest rosnąca i przedziały, na których jest malejąca; przedziały, na których funkcja f jest wypukła i przedziały, na których jest wklęsła.
- b. Znaleźć punkty, w których funkcja f nie ma pochodnej.
- c. W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema?
- d. Znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji f .
- e. Znaleźć granice jednostronne funkcji f w $\pm\infty$.
- f. Znaleźć granice jednostronne funkcji f' (pochodnej funkcji f) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

G. Naszkicować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.

Rozw. Pierwiastkami pochodnej są $-1, 1, 2$, ale ważniejsze jest to, że zmienia ona swój znak w punktach $0, 1, 2$. Wobec tego: jeśli $x > 2$, to $f'(x) > 0$, jeśli $1 < x < 2$, to $f'(x) < 0$, jeśli $0 < x < 1$, to $f'(x) > 0$ i $f'(x) < 0$ dla $x < 0$ z wyjątkiem $x = -1$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle malejąca na półprostej $(-\infty, 0]$ oraz na przedziale $[1, 2]$. Na przedziale $[0, 1]$ i na półprostej $[2, \infty)$ jest ściśle rosnąca. Mamy również $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ — ułamek jest dodatni i jego mianownik dąży

do 0. Analogicznie $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$. Wobec tego wykres funkcja f nie ma pochodnej w punkcie

0 , jednostronne pochodne istnieją, ale są różne. W punkcie $(0, 0)$ funkcja f ma „ostrze”: lewa część wykresu jest styczna do osi \overrightarrow{OY} i prawa też.

Mamy też $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, bo $f(x)$ jest sumą różnych potęg zmiennej x , współczynnik przy najwyższej z nich jest dodatni. Podobnie $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (przyp. 14 jest liczbą parzystą).

Mamy również $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, bo licznik ma stopień 4 i jest dodatni dla $x < 0$, mianownik jest ujemny i ma mniejszy stopień $\frac{1}{3}$. W taki sam sposób stwierdzić można, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

Druga pochodna jest dodatnia na półprostych (x_0, ∞) i $(-\infty, -1)$, ujemna — na przedziałach $(-1, 0)$ i $(0, x_0)$. W punkcie 0 funkcja oczywiście drugiej pochodnej nie ma, bo nawet zdefiniować jej nie można, gdyż nie istnieje $f'(0)$. Stąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła na półprostych $(-\infty, 1]$ i $[x_0, \infty)$. Na przedziałach $[-1, 0]$ i $[0, x_0]$ jest ściśle wklęsła. Wobec tego punkty -1 oraz x_0 to punkty przegięcia funkcji f .

Funkcja nie jest wklęsła na przedziale $[-1, x_0]$, bo nie jest prawdą, że odcinek łączący punkty $(\frac{1}{7}, f(\frac{1}{7}))$ i $(-\frac{1}{7}, f(-\frac{1}{7}))$ leży **pod** wykresem funkcji f , przeciwnie leży on **nad** tym wykresem, co można bez trudu sprawdzić.

inf. Informacje przeróżne (pożyteczne lub zbędne):

$$\log_{10} x = \log x; \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}; \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 + x \leq e^x \text{ dla } x \in \mathbb{R}; \sin x < x < \operatorname{tg} x, \text{ gdy } \frac{\pi}{2} > x > 0;$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x; \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

$$3^4 = 81, 3^5 = 243, 3^6 = 729, 3^7 = 2187, 3^8 = 6561, 3^9 = 19683, 3^{10} = 59049, 3^{11} = 177147.$$