Klasówka poprawkowa, matematyka A, 22 stycznia 2005

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! *Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia udowodnione na zajęciach.

Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. **Każdą kartkę należy podpisać swoim nazwiskiem, imieniem, numerem grupy ćwiczeniowej i numerem swego indeksu**

---

1. Znaleźć liczby a, b takie, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-(1+ax+bx^2)}{x^2}=0$, następnie obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-(1+ax+bx^2)}{x^4}$.

2. Niech $f(t)=c\cos\left(\omega t\sqrt{5}\right)+d\sin\left(\omega t\sqrt{5}\right)-\cos t$ dla $t\in\mathbb{R}$. Obliczyć $f'(t)$ i $f''(t)$.
Znaleźć wszystkie trójki liczb $\omega, c, d\in\mathbb{R}$ takie, że dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzi równość

$$f''(t)+5f(t)+4\cos t=0\,.$$

3. Znaleźć granice $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+\ln x}-\sqrt[3]{x+\sqrt{x}\cos x}\right)$.

4. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $x^2+\frac{125x^2}{(x-1)^2}$ na półprostej otwartej $(1,+\infty)$ lub wykazać, że ta funkcja na półprostej $(1,\infty)$ najmniejszej wartości nie ma.

5. Znaleźć całkę nieoznaczoną $\int x^3\cos x^2\,dx$, a następnie całkę oznaczoną niewłaściwą $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^3\cos x^2\,dx$.

6. Niech $f(x)=9\sqrt[3]{\frac{3x^2-2}{2x^2-1}}$ dla $x\neq\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, wiadomo, że $f'(x)=6x(3x^2-2)^{-2/3}(2x^2-1)^{-4/3}$,
$f''(x)=-2(54x^4-23x^2-6)(3x^2-2)^{-5/3}(2x^2-1)^{-7/3}$ oraz że $f''(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\pm\frac{1}{18}\sqrt{69+15\sqrt{73}}\approx\pm 0.78$.

a. Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest rosnąca;
przedziały, na których funkcja f jest malejąca;
przedziały, na których ta funkcja jest wypukła;
przedziały, na których jest wklęsła.

b. Znaleźć punkty, w których funkcja f nie ma pochodnej.

c. W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema?

d. Znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji f.

e. Znaleźć granice jednostronne funkcji f w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

f. Znaleźć granice jednostronne funkcji f' (pochodnej funkcji f) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

Naszkicować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.

Dodatek dla osób z niezaliczonym pierwszym kolokwium

7. Podać definicję logarytmu liczby x przy podstawie a. Jakie warunki muszą spełniać liczby a, x, by można było zdefiniować $\log_a x$? Obliczyć: $\log_5\frac{1}{5}$, $\log_{10}\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\log_4 2$ $\log_9\sqrt{3}$.

8. Podać definicję sinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność $|\sin t|\geq\frac{1}{2}$ i zaznaczyć odpowiednie fragmenty okręgu $x^2+y^2=1$.

inf. *Informacje przeróżne (pożyteczne lub zbędne):*

$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1+x\leq e^x$ dla $x\in\mathbb{R}$; $\sin x<x<\operatorname{tg}x$, gdy $\frac{\pi}{2}>x>0$;
$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$; $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$; $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.