Klasówka poprawkowa, matematyka A, 22 stycznia 2005, rozwiązania

1. Znaleźć liczby a, b takie, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=0$, następnie obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^3}$.

Rozw. Ponieważ licznik i mianownik dążą do 0, więc może się udać zastosować regułę de l'Hospitala. Trzeba znaleźć granicę ilorazu pochodnych (o ile istnieje), czyli $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(a+2bx)}{2x}$. Ta granica powinna być równa 0 (lub nie istnieć). Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0}\big(\frac{1}{1+x}-(a+2bx)\big)=1-a$ i $\lim\limits_{x\to 0}(2x)=0$, więc dla $a>1$ mamy $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-(a+2bx)}{2x}=-\infty$, a dla $a<1$ — $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-(a+2bx)}{2x}=+\infty$. Wobec tego musi zachodzić równość $1-a=0$, czyli $a=1$. Trzeba ustalić dla jakiej liczby b zachodzi równość: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(1+2bx)}{2x}=0$ (lub dla jakiej liczby b ta granica nie istnieje). Ponieważ licznik i mianownik dążą do 0, więc spróbujemy zastosować regułę de l'Hospitala raz jeszcze. Otrzymujemy wzór $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-1}{(1+x)^2}-2b}{2}=\dfrac{-1-2b}{2}$. Wobec tego $b=-\frac{1}{2}$ w każdym innym przypadku granice jednostronne istnieją, są nieskończone, więc różne od 0. Pozostaje do obliczenia granica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(x-\frac{1}{2}x^2)}{x^3}$. Stosujemy regułę de l'Hospitala trzykrotnie: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(x-\frac{1}{2}x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{-1}-(1-x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1+x)^{-2}+1}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1+x)^{-3}}{6}=\frac{1}{3}$ — we wszystkich trzech przypadkach licznik i mianownik mają granicę 0, twierdzenie de l'Hospitala można zastosować, bowiem ostatnia granica, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1+x)^{-3}}{6}$, istnieje i wobec tego równa jest poprzedniej, czyli $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1+x)^{-2}+1}{6x}$. To z kolei pozwala na „cofnięcie się" o jeszcze jeden krok, zatem $\frac{(1+x)^{-1}-(1-x)}{3x^2}=\frac{1}{3}$. **Podkreślić wypada, że zdarza się, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to p}f(x)=0=\lim\limits_{x\to p}g(x)$, ale granica $\lim\limits_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nie istnieje, por. zad.3.**

Podamy jeszcze jedno rozwiązanie. Mamy $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3h(x)$, gdzie $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=0$ — wynika to z tw. Peano o reszcie we wzorze Taylora lub ze znanego rozwinięcia funkcji $\ln(1+x)$ w szereg potęgowy: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$, ta suma jest nieskończona, czyli jest granicą ciągu, którego kolejnymi wyrazami są: x, $x-\frac{x^2}{2}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$, ... Mamy więc wyjaśnić kiedy granica $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3h(x)-(ax+bx^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-a)x-(\frac{1}{2}+b)x^2+\frac{x^3}{3}+x^3h(x)}{x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-a)-(\frac{1}{2}+b)x+\frac{x^2}{3}+x^2h(x)}{x}$. Jeśli $1-a>0$, to $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(1-a)-(\frac{1}{2}+b)x+\frac{x^2}{3}+x^2h(x)}{x}=+\infty$, jeśli $1-a<0$, to $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(1-a)-(\frac{1}{2}+b)x+\frac{x^2}{3}+x^2h(x)}{x}=-\infty$, zatem musi być spełniona równość $1-a=0$, czyli $a=1$ (podkreślmy: w innych przypadkach prawostronne granice są nieskończone). Pytamy więc o to, dla jakich $b\in\mathbb{R}$ zachodzi równość $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(\frac{1}{2}+b)x+\frac{x^2}{3}+x^2h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\big(-(\frac{1}{2}+b)+\frac{x}{3}+xh(x)\big)=-(\frac{1}{2}+b)$.

Odpowiedź to $b=-\frac{1}{2}$. Pozostaje stwierdzić, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3h(x)-(x-\frac{1}{2}x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\big(\frac{1}{3}+h(x)\big)=\frac{1}{3}$.

Ta metoda jest lepsza. Wyraźnie uwidacznia jak należy przybliżyć funkcję, by uprościć problem, zresztą samo sformułowanie zadania sugeruje użycie trzeciego wielomianu Taylora funkcji $\ln(1+x)$ w punkcie 0. Stosując regułę de l'Hospitala niejako utajniamy rodzaj stosowanego przybliżenia, choć oczywiście merytorycznie jest to to samo (w dowodzie wzoru Taylora stosowaliśmy regułę de l'Hospitala). ∎

2. Niech $f(t) = c\cos\left(\omega t\sqrt{7}\right) + d\sin\left(\omega t\sqrt{7}\right) - \cos t$ dla $t \in \mathbb{R}$. Obliczyć $f'(t)$ i $f''(t)$.
Znaleźć wszystkie trójki liczb $\omega, c, d \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzi równość

$$f''(t) + 7f(t) + 6\cos t = 0\,.$$

Rozw. Zachodzą równości $f'(t) = -c\omega\sqrt{7}\sin\left(\omega t\sqrt{7}\right) + d\omega\sqrt{7}\cos\left(\omega t\sqrt{7}\right) + \sin t$ i wobec tego $f''(t) = -7c\omega^2\cos\left(\omega t\sqrt{7}\right) - 7d\omega^2\sin\left(\omega t\sqrt{7}\right) + \cos t$, zatem należy znaleźć wszystkie takie trójki liczb $\omega, c, d \in \mathbb{R}$, dla których równość $0 = f''(t) + 7f(t) + 6\cos t = -7c\omega^2\cos\left(\omega t\sqrt{7}\right) - 7d\omega^2\sin\left(\omega t\sqrt{7}\right) +$ $+\cos t + 7c\cos\left(\omega t\sqrt{7}\right) + 7d\sin\left(\omega t\sqrt{7}\right) - 7\cos t + 6\cos t = 7(1-\omega^2)\left[c\cos\left(\omega t\sqrt{7}\right) + d\sin\left(\omega t\sqrt{7}\right)\right]$ zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych t. Możliwości są następujące $\omega^2 = 1$ lub $\omega^2 \neq 1$. W pierwszym przypadku, czyli $\omega = \pm 1$, równość $f''(t) + 7f(t) + 6\cos t = 0$ zachodzi dla wszystkich liczb $t \in \mathbb{R}$ niezależnie od wyboru c, d. W drugim przypadku równość $c\cos\left(\omega t\sqrt{7}\right) + d\sin\left(\omega t\sqrt{7}\right) = 0$ musi mieć miejsce dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Przyjmując $t = 0$ otrzymujemy $c = 0$. Wynika stąd, że musi być spełniona równość $d\sin\left(\omega t\sqrt{7}\right) = 0$. Oznacza to, że albo $d = 0$, albo $\omega = 0$. Mamy więc trzy rodzaje trójek $\pm 1, c, d$, $\omega, 0, 0$ oraz $0, 0, d$. ∎

3. Znaleźć granice $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x + \ln x} - \sqrt[3]{x + \cos x}\right)$.

To zadanie jest dosłownym powtórzeniem zadania z 11 stycznia i jego rozwiązania nie powtarzam. ∎

4. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $x^2 + \frac{27x^2}{(x-1)^2}$ na półprostej otwartej $(1, +\infty)$ lub wykazać, że ta funkcja na półprostej $(1, \infty)$ najmniejszej wartości nie ma.

Rozw. Niech $f(x) = x^2 + \frac{27x^2}{(x-1)^2}$. Mamy $f'(x) = 2x + 27\frac{2x\cdot(x-1)^2 - x^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \overset{\text{skracamy}}{\underset{\text{przez } x-1}{=\!=\!=}}$ $= 2x + 27\frac{2x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^3} \overset{\text{wyłączamy}}{\underset{2x}{=\!=\!=}} 2x\left(1 + 27\frac{x-1-x}{(x-1)^3}\right) = 2x\left(1 + \frac{-27}{(x-1)^3}\right) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 = \frac{27}{(x-1)^3}$, czyli gdy $1 = \frac{3}{x-1}$, tzn. gdy $x = 4$ — oczywiście rozpatrujemy wyłącznie $x > 0$, bowiem funkcja z założenia jest określona jedynie na $(0, \infty)$. $f(4) = 4^2 + \frac{27\cdot 4^2}{(4-1)^2} = 64$. Jasne jest, że jeśli $x > 10$, to $f(x) > 10^2 = 100 > 64$ oraz że jeśli $x < 1{,}1$, to $f(x) > \frac{27}{(1{,}1-1)^2} > 2700 > 64$. Wobec tego poza przedziałem $[1\frac{1}{10}, 10]$ funkcja f przyjmuje wartości większe niż $f(4) = 64$. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[1\frac{1}{10}, 10]$, więc przyjmuje w pewnym punkcie tego przedziału swą najmniejszą na TYM przedziale wartość — wynika to z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów. Wartości przyjmowane poza tym przedziałem są większe niż $f(4) = 64$. Wynika stąd, że najmniejszą wartością funkcji f na półprostej $(1, \infty)$ jest $f(4) = 64$.

Uwaga: Można nie używać twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na przedziale domkniętym. Zamiast tego można bez trudu stwierdzić, że jeśli $1 < x < 4$, *to* $f'(x) > 0$ *i wobec tego na przedziale* $(1, 4]$ *funkcja* f *maleje, analogicznie jeśli* $4 < x$, *to* $f'(x) > 0$, *więc na półprostej* $[4, \infty)$ *funkcja* f *rośnie, zatem* $f(4) = 64$ *jest jej najmniejszą wartością.*

Skrócona instrukcja obsługi wyrażeń algebraicznych: zanim Panie Studentki lub Panowie Studenci rozpoczną wymnażanie, powinni sprawdzić, czy przypadkiem coś się nie skraca ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! ∎

5. Znaleźć całkę nieoznaczoną $\int x^3e^{-x^2}\,dx$, a następnie całkę oznaczoną niewłaściwą $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$.

Rozw. $\int x^3e^{-x^2}\,dx = \int\left(x^2\cdot xe^{-x^2}\right) \xlongequal[dy=-2x\,dx]{y=-x^2} = -\frac{1}{2}\int ye^y\,dy \xlongequal[\text{części}]{\text{przez}} \frac{1}{2}\left[ye^y - \int 1\cdot e^y\,dy\right] =$

$=\frac{1}{2}\left[ye^y - e^y\right] + C = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.

Następnie $\int_0^{\infty} x^3e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\int_0^c x^3e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{2}c^2e^{-c^2} - \frac{1}{2}e^{-c^2} + \frac{1}{2}0^2e^{-0^2} + \frac{1}{2}e^{-0^2}\right) = \frac{1}{2}$, bo

$\lim\limits_{c\to\infty} e^{-c^2} = \lim\limits_{c\to\infty}\frac{1}{e^{c^2}} = 0$ i $\lim\limits_{c\to\infty} c^2e^{-c^2} = \lim\limits_{c\to\infty}\frac{c^2}{e^{c^2}} = 0$, ten drugi wynik był na wykładzie (wielokrotnie), można go też łatwo uzyskać stosując regułę de l'Hospitala. ■

6. Niech $f(x) = (x+3)\sqrt[3]{\frac{(x^2-9)^2}{(x+2)^2}}$ dla wszystkich $x \neq -2$. Zachodzą równości

$$f'(x) = \tfrac{5}{3}x(x+1)\sqrt[3]{\tfrac{(x+3)^2}{(x+2)^5(x-3)}}\,,\; f''(x) = \frac{10(x^4+2x^3-14x^2-54x-27)}{9\sqrt[3]{(x+2)^8(x-3)^4(x+3)}}$$

dla tych wszystkich liczb $x \in \mathbb{R}$, dla których prawe strony wzorów mają sens.

Wielomian $x^4+2x^3-14x^2-54x-27$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste $x_1 \approx -0{,}6$ i $x_2 \approx 4{,}37$, oba są jednokrotne. *Funkcja nie ma asymptot poziomych, ani ukośnych.*

a. Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest rosnąca;
przedziały, na których funkcja f jest malejąca;
przedziały, na których ta funkcja jest wypukła;
przedziały, na których jest wklęsła.

b. Znaleźć punkty, w których funkcja f nie ma pochodnej.

c. W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema?

d. Znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji f.

e. Znaleźć granice jednostronne funkcji f w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

f. Znaleźć granice jednostronne funkcji f' (pochodnej funkcji f) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

Naszkicować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.

Informacja: znów kilka osób poszukiwało asymptot poziomych i ukośnych.

Pytanie: jak można skłonić studentów do przeczytania zadania przed rozpoczęciem rozwiązywania?!

Funkcja przyjmuje wartość 0 w punktach ± 3. Jest nieokreślona w punkcie -2. Jeżeli $-2 \neq x > -3$, to $f(x) \geq 0$. Mamy więc $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \infty$, bowiem $\lim\limits_{x\to-2}(x+3) = 1$, $\lim\limits_{x\to-2}(x^2-9)^2 = 25$ i $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)^2 = 0$ (mamy więc do czynienia z wyrażeniem typu $1\cdot\sqrt[3]{\frac{25}{0^+}}$, symbol 0^+ oznacza, że granica mianownika wyrażenia podpierwiastkowego jest $=0$, przy czym w pobliżu -2 mianownik jest >0). Mamy też $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, bo $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2-9)^2}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\frac{(1-\frac{9}{x^2})^2}{(1+\frac{2}{x})^2} = \infty^2\cdot 1 = \infty$.

Mamy $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2-9)^2}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\frac{(1-\frac{9}{x^2})^2}{(1+\frac{2}{x})^2} = \infty^2\cdot 1 = \infty$, więc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Funkcja x zmienia znak w punkcie 0, tzn. dla $x<0$ jest ujemna, dla $x>0$ jest dodatnia. Funkcja $x+1$ zmienia znak w punkcie -1, tzn. dla $x<-1$ jest ujemna, a dla $x>-1$ — dodatnia. Funkcja $(x+3)^2$ nie zmienia znaku w punkcie -3, chociaż przyjmuje w tym punkcie wartość 0, bowiem na całej prostej z wyjątkiem punktu -3 jest dodatnia! Funkcja $(x+2)^5$ zmienia znak w punkcie -2, bo jest ujemna na półprostej $(-\infty,-2)$ i dodatnia na półprostej $(-2,\infty)$, przypominamy $z>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z^5>0$. Funkcja $x-3$ zmienia znak w punkcie 3. Również $z>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt[3]{z^5}>0$. Wobec tego pochodna f' zmienia znak w punktach w punktach

$-2,-1,0,3$. Jasne jest, że dla $x>3$ wszystkie czynniki występujące w f' są dodatnie, zatem wtedy $f'(x)>0$. Stąd natychmiast wynika, że pochodna f' jest dodatnia na: półprostej $(3,\infty)$, przedziale $(-1,0)$ i półprostej $(-\infty,-2)$. Pochodna f' jest ujemna na przedziale $(0,3)$ oraz na przedziale $(-2,0)$. Wynika stąd, że funkcja f jest ściśle rosnąca na: półprostej $[3,\infty)$, na przedziale $[-1,0]$ i na półprostej $(-\infty,-2)$. Na przedziale $(-2,-1]$ funkcja f jest ściśle malejąca, to samo dotyczy przedziału $[0,3]$. Z tego, co napisaliśmy do tej pory wynika od razu, że w punkcie -1 funkcja f ma lokalne minimum, w punkcie 0 — lokalne maksimum, w punkcie 3 — lokalne minimum.

Zauważmy jeszcze, że $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x)=+\infty$, bo

$$f'(x)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{x^3(x+1)^3(x+3)^2}{(x+2)^5(x-3)}}\,,$$

więc wyrażenie podpierwiastkowe ma licznik stopnia 8, mianownik stopnia 6, po wymnożeniu współczynniki przy najwyższych potęgach są równe $1>0$. Taka sama argumentacja przekonuje nas, że $\lim\limits_{x\to-2^-} f'(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to-2^+} f'(x)=-\infty$. Analogicznie $\lim\limits_{x\to3^-} f'(x)=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to3^+} f'(x)=\infty$. Funkcja f nie ma więc w punkcie 3 pochodnej (również nieskończonej), bo jednostronne pochodne są różne. W tym punkcie wykres ma „ostrze" skierowane ku dołowi. Oczywiście w punkcie -2 też nie pochodnej, ale tam w ogóle nie ma sensu o niej wspominać, bo punkt -2 leży poza dziedziną funkcji f.

Druga pochodna zmienia znak w punkcie -3 oraz w punktach x_1 i x_2, bowiem mianownik zmienia znak w punkcie -3, natomiast licznik, czyli wielomian $10(x^4+2x^3-14x^2-54x-27)= =10(x-x_1)(x-x_2)(x^2+px+q)$ zmienia znak w punktach x_1,x_2, liczby p,q to jakieś liczby rzeczywiste*, przy czym, wg. podanej informacji, wielomian x^2+px+q nie ma pierwiastków, zatem przyjmuje jedynie wartości dodatnie. Stąd wynika, że druga pochodna jest dodatnia na: półprostej $(x_2.\infty)$, przedziale $(-2,x_1)$ i przedziale $(-3,-2)$. Na półprostej $(-\infty,-3)$ i na przedziałach $(x_1,3)$, $(3,x_2)$ jest ujemna (w punkcie -3 funkcja f pierwszej pochodnej nie ma, zatem nie ma też w tym punkcie drugiej pochodnej). Z tego wszystkiego wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła na półprostej $[x_2,\infty)$, na przedziałach $(-2,x_1]$, $[-3,-2)$, zaś ściśle wklęsła na półprostej $(-\infty,-3]$ i na przedziałach $[x_1,3]$, $[3,x_2]$. Stąd wynika, że punktami przegięcia funkcji f są: -3, x_1 i x_2.

Prosta $x=-2$ jest obustronną asymptotą pionową funkcji f, ale nikt w zadaniu o to nie pyta!
Uwaga. Wiele osób pisało, że funkcja jest wklęsła na przedziale (x_1,x_2). To nieprawda! Nie jest, chociaż jest wklęsła na przedziałach $[x_1,3]$, $[3,x_2]$. Jest to spowodowane tym, że w punkcie 3 nie ma pochodnej! Nieistnienie pochodnej stwarza ryzyko takiego zdarzenia. Funkcja wklęsła nie jest, bo odcinek o końcach $(2,f(2))$, $(4,f(4))$ leży **nad** zamiast **pod** wykresem funkcji! Zachodzi np. nierówność $\frac{f(2)+f(4)}{2}>0=f(3)=f(\frac{2+4}{2})$. ■

Dodatek dla osób z niezaliczonym pierwszym kolokwium

7. Podać definicję logarytmu liczby x przy podstawie a. Jakie warunki muszą spełniać liczby a,x, by można było zdefiniować $\log_a x$? Obliczyć: $\log_5\frac{1}{5}$, $\log_{10}\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\log_4 2$ $\log_9\sqrt{3}$.

Rozw. Logarytmem dodatniej liczby x przy podstawie $a>0, a\neq1$ nazywamy taką liczbę y, że $a^y=x$, czyli $a^{\log_a x}=x$.

$\log_5\frac{1}{5}=-1$, bo $5^{-1}=\frac{1}{5}$, $\log_{10}\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{1}{2}$, bo $10^{-1/2}=\frac{1}{10^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\log_4 2=\frac{1}{2}$, bo $4^{1/2}=\sqrt{4}=2$ i wreszcie $\log_9\sqrt{3}=\frac{1}{2}$, bo $9^{1/2}=\sqrt{9}=3$.

8. Podać definicję sinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność $|\sin t|\geq\frac{1}{2}$ i zaznaczyć

---

* Mamy $(x-x_1)(x-x_2)(x^2+px+q)=x^4+(p-x_1-x_2)x^3+(q-px_1-px_2)x^2+(px_1x_2-qx_1-qx_2)x+qx_1x_2$, więc muszą być spełnione równości $2=p-x_1-x_2$, $-14=q-px_1-px_2$ oraz $-27=qx_1x_2$, zatem $p=2+x_1+x_2$, $q=px_1+px_2-14$.

odpowiednie fragmenty okręgu $x^2+y^2=1$.

Rozw. Sinusem dodatniego kąta α nazywamy drugą współrzędną punktu A leżącego na okręgu jednostkowym, który jest końcem „łuku" długości α zaczynającego się w punkcie $(1,0)$. Jeśli „łuk" ma długość większą niż 2π, czyli długość okręgu, to obchodzenie okręgu należy kontynuować, aż do momentu, gdy przebyta droga stanie się równa α. Ponieważ $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}=\sin\frac{5\pi}{6}$ i sinus rośnie na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$, zaś na przedziale $[\frac{\pi}{2},\pi]$ — maleje, więc dla $t\in[0,\pi]$ nierówność $|\sin t|\geq\frac{1}{2}$ jest równoważna nierówności $\frac{\pi}{6}\leq t\leq\frac{5\pi}{6}$. Zatem nierówność $\sin t\geq\frac{1}{2}$ równoważna jest temu, że istnieje liczba całkowita k taka, że $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq t\leq\frac{5\pi}{6}+2k\pi$. Z nieparzystości sinusa wynika, czyli z tego, że $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ dla $\alpha\in\mathbb{R}$, wynika od razu, że nierówność $-\sin t\leq-\frac{1}{2}$ jest równoważna istnieniu liczby całkowitej k takiej, że $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leq t\leq-\frac{\pi}{6}+2k\pi$. Na rysunku powinny pojawić się dwa łuki, każdy z nich powinien być symetryczny względem osi OY, długość każdego z nich powinna być równa $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$.

inf. *Informacje przeróżne (pożyteczne lub zbędne):*

$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1+x\leq e^x$ dla $x\in\mathbb{R}$; $\sin x<x<\operatorname{tg}x$, gdy $\frac{\pi}{2}>x>0$;

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\sin y\cos x$; $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$; $\cos^2x+\sin^2x=1$.