

**Klasówka poprawkowa, matematyka A, 20 stycznia 2005**

1. Znaleźć liczby  $a, b$  takie, że  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - (1+ax+bx^2)}{x^2} = 0$ , następnie obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1+ax+bx^2)}{x^3}.$$

2. Niech  $f(t) = e^{at}$  dla  $t \in \mathbb{R}$ . Obliczyć  $f'(t)$  i  $f''(t)$ . Znaleźć wszystkie liczby  $a, \omega \in \mathbb{R}$  takie, że dla każdej liczby rzeczywistej  $t$  zachodzi równość  $f''(t) - 5f'(t) + 6f(t) = 0$ .

3. Znaleźć granice  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$  oraz  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x + \ln x} - \sqrt[3]{x + \sqrt{x}})$ .

4. Na paraboli  $y = x^2$  znaleźć punkt leżący najbliżej punktu  $(2, 0)$ . Znaleźć kąt między odcinkiem łączącym punkt  $(2, 0)$  ze znalezionym.

5. Niech  $f(x) = (x+1)^{5/3} (x^2+2x)^{1/3}$ .

Wiemy, że  $f'(x) = \frac{1}{3} (x+1)^{2/3} (x^2+2x)^{-2/3} (7x^2+14x+2)$ , niewymiernymi pierwiastkami funkcji  $f'$  są  $x_5 \approx -1.845$  oraz  $x_6 \approx -0.155$ , ma ona również pierwiastek wymierny,

$f''(x) = \frac{2}{9} (x+1)^{-1/3} (x^2+2x)^{-5/3} (14x^4+56x^3+61x^2+10x-4)$ , pierwiastkami drugiej pochodnej są

$x_1 \approx 0.177$ ,  $x_2 \approx -2.177$ ,  $x_3 \approx -0.492$ ,  $x_4 \approx -1.508$ , są one niewymierne.

Znaleźć przedziały, na których funkcja  $f$  jest rosnąca; przedziały, na których funkcja  $f$  jest malejąca; przedziały, na których ta funkcja jest wypukła; przedziały, na których jest wklęsła. Znaleźć punkty, w których funkcja  $f$  nie ma pochodnej. W jakich punktach funkcja  $f$  ma lokalne ekstrema? Znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji  $f$ . Znaleźć granice jednostronne funkcji  $f$  w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę oraz granice jednostronne funkcji  $f'$  (pochodnej funkcji  $f$ ) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.

**Naszkieować wykres funkcji  $f$  uwzględniając otrzymane rezultaty.**

6. Znaleźć całkę nieoznaczoną  $\int \sin x \cos x \sin(\sin x) dx$ ,

a następnie całkę oznaczoną  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x \sin(\sin x) dx$ .