Klasówka trzecia, matematyka A, 11 stycznia 2005, rozwiązania

Gdyby ktoś miał pytania, będę w piątek od mniej więcej 12:30 w swym pokoju, tel 55 44515 do około 17:00, tekst został napisany dosyć szybko, więc mogą być jakieś literówki.

Klasówka poprawkowa na wydziale chemii, sobota 14:15

1. Znaleźć liczby a, b takie, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^2} = 0$, następnie obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^3}$

Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)\right) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2$. Możemy więc **spróbować** skorzystać z reguły de l'Hospitala. Iloraz pochodnych równy jest $\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - a - 2bx}{2x}$. Mamy $\lim\limits_{x\to)} 0(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - a - 2bx) = \frac{1}{2} - a$. Jeśli $\frac{1}{2} - a > 0$, to $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - a - 2bx}{2x} = +\infty$, zatem $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^2} = +\infty \neq 0$. Wykazaliśmy, że nie może zachodzić nierówność $\frac{1}{2} - a > 0$. Analogicznie wykluczamy nierówność $\frac{1}{2} - a = 0$. Musi więc być $\frac{1}{2} - a = 0$. W tej sytuacji $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - a - 2bx = 0$. Zastosujemy regułę de l'Hospitala do ilorazu $\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - a - 2bx}{2x}$. Mamy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-1}{4(\sqrt{1+x})^3} - 2b}{2} = -\dfrac{1}{8} - b$. Wobec tego musi być $b = -\frac{1}{8}$. Ostatnia rzecz, która pozostała do zrobienia, to znalezienie granicy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^3}$. Po dwukrotnym zastosowaniu reguły de l'Hospitala otrzymujemy granicę $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-1}{4(\sqrt{1+x})^3} + \frac{1}{4}}{6x}$ (powtarzamy poprzednie rachunki z $a = \frac{1}{2}$ i $b = -\frac{1}{8}$ ze zmienionym mianownikiem!). Liczniki i mianownik dążą do 0, więc możemy spróbować zastosować regułę de l'Hospitala raz jeszcze. Otrzymujemy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{3}{8(\sqrt{1+x})^5}}{6} = \frac{1}{16}$, więc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^3} = \frac{1}{16}$. **Koniec tego rozwiązania.**

To była metoda najbardziej studentom narzucająca się. Teraz rozwiążemy to krócej. Zastosujemy wzór Taylora z resztą Peano (można też dwumian Newtona): $\sqrt{1+x} = 1 + \binom{\frac12}{1}x + \binom{\frac12}{2}x^2 + \binom{\frac12}{3}x^3 + x^3 r(x)$ przy czym wiadomo, że $\lim\limits_{x\to 0} r(x) = 0$. Mamy $\binom{\frac12}{1} = \frac{1}{2}$, $\binom{\frac12}{2} = \frac{\frac12(-\frac12)}{2!} = -\frac{1}{8}$ i $\binom{\frac12}{3} = \frac{\frac12(-\frac12)(-\frac32)}{3!} = \frac{1}{16}$. Wobec tego

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac12 - a\right)x - \left(\frac18 + b\right)x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3 r(x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac12 - a\right) - \left(\frac18 + b\right)x + \frac{1}{16}x^2 + x^2 r(x)}{x}.$$

By ta granica była skończona musi być $a = \frac{1}{2}$. Wtedy jest ona równa $-\frac{1}{8} - b$. Ponieważ ma być równa 0, więc $b = -\frac{1}{8}$. Mamy wtedy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - (1+\frac12 x - \frac18 x^2)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{16}x^3 + x^3 r(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{16} + r(x)\right)$. DRUGIE rozwiązanie zostało zakończone.

Pokażemy jeszcze jedną metodę, dostępną dla uczniów szkół średnich. Mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-(1+ax+bx^2)^2}{x^2(\sqrt{1+x}+(1+ax+bx^2))} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-\left[1+2ax+(a^2+2b)x^2+2abx^3+b^2x^4\right]}{x^2(\sqrt{1+x}+(1+ax+bx^2))} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-2a)x-(a^2+2b)x^2-2abx^3-b^2x^4}{x^2(\sqrt{1+x}+(1+ax+bx^2))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-2a)-(a^2+2b)x-2abx^2-b^2x^3}{x(\sqrt{1+x}+(1+ax+bx^2))}$. Mianownik dąży do 0, więc by istniała skończona granica, licznik też musi mieć granicę 0. To oznacza, że musi zachodzić równość $a = \frac{1}{2}$. Wtedy $0 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-2a)-(a^2+2b)x-2abx^2-b^2x^3}{x(\sqrt{1+x}+(1+ax+bx^2))} = -\frac{a^2+2b}{2} = -\frac{1+8b}{8}$, zatem $b = -\frac{1}{8}$. Mamy wtedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-(1+ax+bx^2)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-2a)x-(a^2+2b)x^2-2abx^3-b^2x^4}{x^3(\sqrt{1+x}+(1+ax+bx^2))}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac18 x^3-\frac1{64}x^4}{x^3(\sqrt{1+x}+(1+\frac12 x-\frac18 x^2))}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac18-\frac1{64}x}{(\sqrt{1+x}+(1+\frac12 x-\frac18 x^2))}=\frac1{16}\,.$$

To kończy TRZECIE rozwiązanie tego zadania. ■

2. Niech $f(t)=e^{at}\cos\big(\omega t\sqrt5\big)$ dla $t\in\mathbb{R}$. Obliczyć $f'(t)$ i $f''(t)$. Znaleźć liczby $a,\omega\in\mathbb{R}$ takie, że dla każdej liczby rzeczywistej t zachodzi równość $f''(t)+2f'(t)+6f(t)=0$.
Mamy $f'(t)=ae^{at}\cos\big(\omega t\sqrt5\big)-\omega\sqrt5 e^{at}\sin\big(\omega t\sqrt5\big)$, zatem
$f''(t)=a^2e^{at}\cos\big(\omega t\sqrt5\big)-2a\omega\sqrt5e^{at}\sin\big(\omega t\sqrt5\big)-5\omega^2e^{at}\cos\big(\omega t\sqrt5\big)$.
Otrzymujemy więc $0=f''(t)+2f'(t)+6f(t)=e^{at}\big[(a^2+2a+6-5\omega^2)\cos\big(\omega t\sqrt5\big)-2(a+1)\omega\sqrt5\sin\big(\omega t\sqrt5\big)\big]$.
Przyjmując $t=0$ otrzymujemy $0=a^2+2a+6-5\omega^2$. Przyjmując $\omega=0$ otrzymujemy $0=a^2+2a+6=(a+1)^2+5$, co jest niemożliwe, zatem $\omega\neq 0$. Przyjmijmy teraz $t=\frac{\pi}{2\omega\sqrt5}$, czyli $\omega t\sqrt5=\frac{\pi}{2}$. Otrzymujemy $0=-2(a+1)\omega\sqrt5$, zatem $a=-1$ i wobec tego $0=(-1)^2+2(-1)+5-5\omega^2$, czyli $\omega^2=1$, więc $\omega=\pm1$. ■

3. Znaleźć granice $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\sqrt[3]{x+\ln x}-\sqrt[3]{x+\cos x}\big)$.

Mamy $0\le\left|\frac{\cos x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, zatem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$.

Uwaga. Reguła de l'Hospitala nie działa niestety, bo nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\sin x}{1}$, a jej istnienie jest jednym z założeń twierdzenia de l'Hospitala. ⊠

Drugą granicę obliczamy za pomocą reguły de l'Hospitala. Można ją stosować, bo $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac1x}{1}=0$. Stąd wnioskujemy, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Znajdziemy trzecią granicę. Mamy $\sqrt[3]{x+\ln x}-\sqrt[3]{x+\cos x}=\sqrt[3]{x}\Big[\sqrt[3]{1+\frac{\ln x}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{\cos x}{x}}\Big]$. Wyrażenie w nawiasie kwadratowym ma granicę 0, ale $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty$. Jesteśmy więc w niemiłej sytuacji: $0\cdot\infty$. Należy przybliżyć wielkości $\sqrt[3]{1+\frac{\ln x}{x}}$ oraz $\sqrt[3]{1+\frac{\cos x}{x}}$. Mamy $\big(\sqrt[3]{x}\big)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Wobec tego $\sqrt[3]{1+y}=\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}y+y\varrho(y)=$ $=1+\frac13y+y\varrho(y)$, gdzie $\lim\limits_{y\to0}\varrho(y)=0$. Mamy więc $\sqrt[3]{x}\Big[\sqrt[3]{1+\frac{\ln x}{x}}-\sqrt[3]{1+\frac{\cos x}{x}}\Big]=$
$$=\sqrt[3]{x}\Big[1+\frac{\ln x}{3x}+\frac{\ln x}{3x}\varrho\big(\tfrac{\ln x}{3x}\big)-1-\frac{\cos x}{3x}-\frac{\cos x}{3x}\varrho\big(\tfrac{\cos x}{3x}\big)\Big)=\sqrt[3]{x}\Big[\frac{\ln x}{3x}-\frac{\cos x}{3x}+\frac{\ln x}{3x}\varrho\big(\tfrac{\ln x}{3x}\big)-\frac{\cos x}{3x}\varrho\big(\tfrac{\cos x}{3x}\big)\Big].$$
Z nierówności $0\le\big|\sqrt[3]{x}\frac{\cos x}{x}\big|\le\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ wynika, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\frac{\cos x}{3x}=0$. Stosując regułę de l'Hospitala otrzymujemy $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac1x}{-\frac23x^{-1/3}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}=0$. Obliczenia zostały zakończone.
Można rozwiązać to zadanie nieco inaczej.
$$\sqrt[3]{x+\ln x}-\sqrt[3]{x+\cos x}=\frac{x+\ln x-(x+\cos x)}{\sqrt[3]{(x+\ln x)^2}+\sqrt[3]{x+\cos x}\sqrt[3]{x+\cos x}+\sqrt[3]{(x+\cos x)^2}}=$$
$$=\frac{\ln x-\cos x}{\sqrt[3]{(x+\ln x)^2}+\sqrt[3]{x+\cos x}\sqrt[3]{x+\cos x}+\sqrt[3]{(x+\cos x)^2}}=$$
$$=\frac{\ln x-\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\ \sqrt[3]{\big(1+\tfrac{\ln x}{x}\big)^2}+\sqrt[3]{1+\tfrac{\ln x}{x}}\ \sqrt[3]{1+\tfrac{\cos x}{x}}+\sqrt[3]{\big(1+\tfrac{\cos x}{x}\big)^2}$$
Podobnie jak w poprzednim rozwiązaniu wykazujemy, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}=0$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}=0$ i otrzymujemy $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\sqrt[3]{x+\ln x}-\sqrt[3]{x+\cos x}\big)=0$. ■

4. Znaleźć najmniejszą wartość funkcji $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+(6+x)^2}$.
Niech $f(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+(6+x)^2}$. Mamy $f(x)\ge100$ dla $|x|\ge100$, bo $\sqrt{1+x^2}\ge|x|$. Obliczamy

pochodną $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{6+x}{\sqrt{4+(6+x)^2}}$. Równość $f'(x)=0$ jest równoważna równości $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{6+x}{\sqrt{4+(6+x)^2}}$. Z tej równości wynika, że $\Big(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big)^2=\Big(-\frac{6+x}{\sqrt{4+(6+x)^2}}\Big)^2$, a z niej wynika, że $x^2\big(4+(6+x)^2\big)=(6+x)^2(1+x^2)$, czyli $4x^2=(6+x)^2$. Wobec tego albo $2x=6+x$ czyli $x=6$, albo $-2x=6+x$ czyli $x=-2$. Bez trudu sprawdzamy, że $f'(-6)<0$ i $f'(-2)=0$. Wobec tego jedynym pierwiastkiem pochodnej jest liczba -2. Funkcja f jest ciągła, więc na przedziale domkniętym $[-100,100]$ przyjmuje wartość najmniejszą. Może przyjmować w końcu przedziału, w punkcie zerowania się pochodnej lub w punkcie, w którym pochodnej nie ma. Badana funkcja ma pochodną wszędzie i $f(0)<100\le f(100)$ oraz $f(0)<100\le f(-100)$. Wobec tego najmniejsza wartość nie jest przyjmowana w końcu przedziału. Wewnątrz jest tylko jeden kandydat: $x=-2$. Wobec tego $f(-2)$ jest najmniejszą wartością funkcji f na przedziale $[-100,100]$, więc również na całej prostej, bo poza tym przedziałem wartości są większe niż 100. Wynika stąd, że najmniejszą wartością funkcji f jest liczba $f(-2)=\sqrt5+\sqrt{20}=3\sqrt5$. **Koniec tego rozwiązania.**
Liczba $\sqrt{1+x^2}$ to odległość punktów $(0,1)$ i $(x,0)$. Liczba $\sqrt{4+(6+x)^2}$ to odległość punktów $(-6,-2)$ i $(x,0)$. Z nierówności trójkąta wynika, że najmniejszą wartość funkcja $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+(6+x)^2}$ przyjmuje, gdy punkty $(0,1)$, $(-6,-2)$ i $(x,0)$ leżą na jednej prostej. Ta wartość równa jest odległości punktów $(0,1)$ i $(-6,-2)$, czyli liczbie $\sqrt{(-6-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt5$.
Oczywiście znacznie trudniej jest wymyśleć to drugie rozwiązanie, chociaż jest ono o wiele prostsze. ■

6. Znaleźć całkę nieoznaczoną $\int\sin x\cos x\ln(\sin x)\,dx$, a następnie całkę oznaczoną $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cos x\ln(\sin x)\,dx$.

Mamy $\int\sin x\cos x\ln(\sin x)\,dx \xlongequal[dy=\cos x\,dx]{y=\sin x} \int y\ln y\,dy \xlongequal[\text{części}]{\text{przez}} \frac{y^2}{2}\ln y-\int\frac{y^2}{2}\frac{1}{y}\,dy=\frac{y^2}{2}\ln y-\frac{y^2}{4}+C=$

$$=\frac{\sin^2 x}{2}\ln(\sin x)-\frac{\sin^2 x}{4}+C.$$

Stąd $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cos x\ln(\sin x)\,dx=\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{2}\ln(\sin\frac{\pi}{4})-\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{4}-\Big(\frac{\sin^2\frac{\pi}{6}}{2}\ln(\sin\frac{\pi}{6})-\frac{\sin^2\frac{\pi}{6}}{4}\Big) \xlongequal[\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}]{\sin\frac{\pi}{6}=\frac12}$

$=\frac14\ln\frac{\sqrt2}{2}-\frac18-\big(\frac18\ln\frac12-\frac{1}{16}\big)=-\frac{1}{16}$.

5. Niech $f(x)=\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x}}$ dla $x\neq0$. Wiadomo, że wtedy $f'(x)=\frac{x-2}{3\sqrt[3]{(x+2)x^4}}$ oraz $f''(x)=\frac{-2x^2+8x+16}{9\sqrt[3]{(x+2)^4x^7}}$ dla tych wszystkich liczb $x\in\mathbb{R}$, dla których prawe strony wzorów mają sens. Jedynymi pierwiastkami drugiej pochodnej są liczby $x_1=2-2\sqrt3\approx-1{,}46$ oraz $x_2=2+2\sqrt3\approx5{,}46$. Znaleźć przedziały, na których funkcja f jest rosnąca; przedziały, na których funkcja f jest malejąca; przedziały, na których ta funkcja jest wypukła; przedziały, na których jest wklęsła. Znaleźć punkty, w których funkcja f nie ma pochodnej. W jakich punktach funkcja f ma lokalne ekstrema? Znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji f. Znaleźć granice jednostronne funkcji f w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę oraz granice jednostronne funkcji f' (pochodnej funkcji f) w końcach wszystkich przedziałów składających się na jej dziedzinę.
Naszkicować wykres funkcji f uwzględniając otrzymane rezultaty.

Wykresu nie narysuję, ale zrobię wszystko inne. Mamy $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(x+4+\frac4x)=\infty+4+0=\infty$, zatem $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x}}=\infty$. Analogicznie $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x}}=-\infty$.

Podobnie $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x+2)^2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(x+4+\frac4x)=0+4+\infty=\infty$, zatem $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x}}=\infty$ i analogicznie $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt[3]{\frac{(x+2)^2}{x}}=-\infty$. Znaleźliśmy granice funkcji f.

Dla $x\neq0,-2$ mamy $f'(x)=\frac{x-2}{3\sqrt[3]{(x+2)x^4}}>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x-2)(x+2)>0$. Wobec tego dla

$x \neq 0, -2$ mamy $f'(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < -2$ lub $2 < x$. Wobec tego funkcja f jest ściśle rosnąca na każdym z przedziałów $(-\infty, -2]$, $[2, \infty)$. Na każdym z przedziałów $[-2, 0)$, $(0, 2]$ funkcja f jest ściśle malejąca. (Nie jest malejąca w zbiorze $[-2, 0) \cup (0, 2]$, bo $f(-1) = -1 < \sqrt[3]{3} = f(1)$, chociaż $-1 < 1$). Mamy $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x-2}{3\sqrt[3]{(x+2)x^4}} = -\infty$, bo licznik dąży do $-2 < 0$, a dla $x > -2$ mianownik jest dodatni i ma granicę 0. Mamy teraz $\lim\limits_{x \to -2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x-2}{3\sqrt[3]{(x+2)x^4}} = -\infty$, bo licznik dąży do $-4 < 0$ a mianownik dąży do 0 jest dodatni dla $x > -2$. Analogicznie $\lim\limits_{x \to -2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x-2}{3\sqrt[3]{(x+2)x^4}} = +\infty$. Wobec tego $f'_+(-2) = -\infty$ i $f'_-(-2) = +\infty$ (jeśli w jakimś punkcie dziedziny funkcji ciągłej pochodna ma granicę, to ta granica jest pochodną w tym punkcie). Wykazaliśmy, że jednostronne pochodne funkcji f w punkcie -2 są różne, zatem funkcja w tym punkcie pochodnej nie ma. Ponieważ te pochodne są nieskończone, więc wykres ma w tym punkcie „ostrze" (skierowane ku górze, bo $f'_-(-2) = +\infty$).

Należy jeszcze znaleźć granice $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x)$. Są one równe 0, bo $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(x-2)^3}{x^4(x+2)} = 0$ — stopień licznika 3 jest mniejszy niż stopień mianownika 5.

Druga pochodna jest dodatnia na półprostej $(-\infty, -2)$, na przedziale $(-2, x_1)$ i na przedziale $(0, x_2)$. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła na przedziałach $(-\infty, -2]$, $[-2, x_1]$ i $(0, x_2]$, nie jest wypukła na półprostej $(-\infty, x_1) = (-\infty, -2] \cup [-2, x_1)$, bo na odcinku łączącym punkty $(-2.5, f(-2.5))$ i $(-1.5, f(-1.5))$ znajduje się punkt leżący pod wykresem funkcji, np. punkt $\left(-2, \frac{f(-2.5)+f(-1.5)}{2}\right)$, bo $f(-2.5), f(-1.5) < 0$. Na przedziałach $(x_1, 0)$ i (x_2, ∞) druga pochodna jest ujemna, więc na przedziałach $[x_1, 0)$ i $[x_2, \infty)$ funkcja jest ściśle wklęsła.