Klasówka poprawkowa, matematyka A, 21 grudnia 2004

Rozwiązania

1. Rozwiązać równanie $\log_x 9 + \log_{x^3} 9 = \frac{8}{3}$.

Rozw. $\frac{8}{3} = \log_x 9 + \log_{x^3} 9 = \log_x 9 + \frac{\log_x 9}{\log_x x^3} = \log_x 9 + \frac{\log_x 9}{3} = \frac{4}{3}\log_x 9$, zatem $\log_x 9 = 2$, zatem $x^2 = 9$, zatem $x = 3$, przypominamy, że muszą być spełnione nierówności: $0 < x \neq 1$, bo x jest podstawą logarytmu. ■

2. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log(x^2+y^2) = 2 - 2\log 2, \\ \log(x+y) - \log(x-y) = \frac{1}{2}\log 49. \end{cases}$

Rozw. Mamy $\log(x^2+y^2) = 2 - 2\log 2 = \log 100 - \log 2^2 = \log\frac{100}{4} = 25$ oraz $\log 7 = \frac{1}{2}\log 49 = \log(x+y) - \log(x-y) = \log\frac{x+y}{x-y}$, zatem $x^2+y^2 = 25$ i $7 = \frac{x+y}{x-y}$, czyli $6x = 8y$. Mamy więc $25 = x^2+y^2 = x^2 + \frac{9}{16}x^2 = \frac{25}{16}x^2$. Stąd wynika, że $x^2 = 16$, zatem $x = \pm 4$, $y = \frac{3}{4}x = \pm 3$. Liczby $x+y$ oraz $x-y$ muszą być dodatnie, bo można je zlogarytmować. Stąd wynika, że $x = 4$ i wobec tego $y = 3$. ■

3. Rozwiązać równanie $2\log_3\big(\cos(\frac{\pi}{6}+x)\big) + \log_3 4 = 1$.

Rozw. Mamy $1 = 2\log_3\big(\cos(\frac{\pi}{6}+x)\big) + \log_3 4 = \log_3\big(4\cos^2(\frac{\pi}{6}+x)\big)$, zatem $3 = 4\cos^2(\frac{\pi}{6}+x)$, a ponieważ $\cos(\frac{\pi}{6}+x) > 0$, więc $\sqrt{3} = 2\cos(\frac{\pi}{6}+x)$, czyli $\cos(\frac{\pi}{6}+x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$. Wobec tego albo $x = 2k\pi$ dla $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ albo $\frac{\pi}{6} + x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, czyli $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ dla $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. ■

4. Zdefiniować $\log_d y$ nie zapominając o podaniu warunków jakie mają spełniać liczby d, y. Niech $a = \log_{100} 8$. Wyrazić $\log 40$ za pomocą a.

Rozw. Logarytmem liczby $y > 0$ przy podstawie $d > 0, d \neq 1$ nazywamy taką liczbę x, że $y = d^x$, tzn. $\log_d y$ to jedyna taka liczba, że $y = d^{\log_d y}$.
Jeśli $a = \log_{100} 8 = 3\log_{100} 2 = 3\frac{\log 2}{\log 100} = \frac{3}{2}\log 2$, to $\log 2 = \frac{2}{3}a$, więc $\log 40 = \log(10\cdot 4) = \log 10 + \log 4 = 1 + 2\log 2 = 1 + \frac{4}{3}a$. ■

5. Podać definicję sinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność: $\operatorname{tg} t \geq 1$. Zilustrować rozwiązanie tej nierówności na okręgu $x^2+y^2 = 1$.

Rozw. Sinusem kąta $t > 0$ nazywamy współrzędną y takiego punktu (x,y), że $x^2+y^2 = 1$ i kąt którego pierwszym ramieniem jest półoś dodatnia a drugim półprosta zaczynająca się w punkcie $(0,0)$ i przechodząca przez punkt (x,y), jest równy t. Oczywiście $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ oraz $\operatorname{tg} t \geq 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{2}$. Ponieważ liczba π jest okresem funkcji tangens, więc nierówność $\operatorname{tg} t \geq 1$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k taka, że $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq t < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Na okręgu $x^2+y^2 = 1$ zaznaczamy dwa łuki domknięto–otwarte o końcach $\big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\big)$ oraz $(0,1)$ i o końcach $\big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$ oraz $(0,-1)$. ■

6. Rozwiązać równanie: $\sin(2x) = \cos(3x)$.

Rozw. $\sin(2x) = \cos(3x) = \sin\big(\frac{\pi}{2} - 3x\big)$, zatem albo istnieje liczba całkowita k taka, że $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$ i wtedy $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ albo istnieje liczba całkowita k taka, że $2x = \pi - \big(\frac{\pi}{2} - 3x\big) + 2k\pi$ i wtedy $x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi$. ■

7. Znaleźć następujące granice: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n^2+5}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-13n^2+n^3}{n^3+n^2+n+1}$.

Rozw. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1+1/n^2}{1+5/n^2} = \frac{-1+0}{1+0} = -1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-13n^2+n^3}{n^3+n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-13/n+1/n^2}{1+1/n+1/n^2+1/n^3} = \frac{1-0+0}{1+0+0+0} = 1$. ■

8. Znaleźć granice $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{21n^2+12n+2004}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\frac{22n+1}{21n+1}\big)^n$.

Rozw. Dla $n \geq 2004$ mamy $21n^2+12n+2004 \leq 21n^2+n^2+n^2 = 23n^2$, zatem $1 \leq \sqrt[n]{21n^2+12n+2004} \leq \sqrt[n]{23n^2} = \sqrt[n]{23}\cdot\big(\sqrt[n]{n}\big)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot 1^2 = 1$. Z tw. o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{21n^2+12n+2004} = 1$. ■

9. Niech $a_n = \big(1+\frac{1}{1\cdot 3}\big)\cdot\big(1+\frac{1}{3\cdot 5}\big)\cdot\big(1+\frac{1}{5\cdot 7}\big)\cdot\ldots\cdot\big(1+\frac{1}{(2n-3)\cdot(2n-1)}\big)\cdot\big(1+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\big)$. Podać liczbowe wartości wyrazów a_1, a_2, a_3. Wykazać, że ciąg (a_n) ma granicę skończoną.

Rozw. Ciąg (a_n) jest rosnący, bo $n+1$-y wyraz tego ciągu otrzymujemy przez pomnożenie n-tego przez $1 + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n31)} > 1$, więc ma granicę (na razie nie wiadomo, czy skończoną). $1 + \frac{1}{(2j-1)\cdot(2j+1)} \leq e^{\frac{1}{(2j-1)\cdot(2j+1)}} = e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j+1})}$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Wobec tego $a_n \leq e^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})}\cdot e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})}\cdot e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})}\cdot\ldots\cdot e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})} = e^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})} = e^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})} < e^{\frac{1}{2}}$, zatem ciąg jest ograniczony z góry liczbą $e^{\frac{1}{2}}$, więc jego granica jest skończona. ■