Klasówka 2, matematyka A, 7 grudnia 2004, rozwiązania

1. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0}\big(\sin(\frac{1}{x})\cdot \operatorname{tg} x\big)$, jeśli ta granica istnieje lub wykazać, że nie istnieje.

Rozw. $|\sin\alpha|\le 1$ dla każdej liczby $\alpha\in\mathbb{R}$, zatem $0\le \big|\sin(\frac{1}{x})\cdot \operatorname{tg} x\big|\le |\operatorname{tg} x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, więc

$$\lim_{x\to 0}\big(\sin(\tfrac{1}{x})\cdot \operatorname{tg} x\big)=0\,. \ \blacksquare$$

2. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\ln x}$, jeśli ta granica istnieje lub wykazać, że nie istnieje.

Rozw. Ponieważ licznik i mianownik to funkcje ciągłe i $\cos\frac{\pi}{2}=0=\ln 1$, więc można spróbować zastosować regułę markiza de l'Hospitala (mamy do czynienia z nieoznaczonością typu $\frac{0}{0}$). Stąd wynika, że

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\cos\frac{\pi x}{2})'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{x}}=\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{1}}=-\frac{\pi}{2}$, więc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\ln x}=-\frac{\pi}{2}$. $\blacksquare$

3. Dla jakich liczb $a\in\mathbb{R}$ funkcja zdefiniowana równościami $f(x)=\frac{\cos(2x)-\sqrt{1+2x^2}}{x}$ i $f(0)=a$ jest ciągła w punkcie 0, dla jakich a jest ciągła w punkcie 1.

Rozw. Licznik i mianownik są funkcjami różniczkowalymi, które w punkcie 0 przyjmują wartość 0. Stosujemy regułę markiza de l'Hospitala w celu znalezienia granicy $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. Funkcja $\cos(2x)$ przyjmuje w punkcie 0 swą największą wartość, zatem jej pochodna w punkcie 0 równa jest 0. Funkcja $\sqrt{1+2x^2}$ przyjmuje w punkcie 0 swą najmniejszą wartość, zatem jej pochodna w punkcie 0 równa jest 0. Wobec tego pochodna licznika w punkcie 0 równa jest 0. Pochodna mianownika w każdym punkcie równa jest 1. Widać więc, że $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{0}{1}=0$. Wobec tego funkcja f jest ciągła w punkcie 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$. W punkcie 1 jest ciągła niezależnie od wyboru a, bo licznik i mianownik są ciągłe w punkcie 1 i mianownik jest $\neq 0$. $\blacksquare$

4. Znaleźć pochodną funkcji f, jeśli $f(x)=$

x^4e^x $\qquad$ $\frac{\cos(2x)}{1+x^2}$ $\qquad$ $(1+x^2)^{\ln x}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(\cos(3x^2))$.

Rozw. $\big(x^4e^e\big)'=\big(x^4\big)'e^x+x^4\big(e^x\big)'=4x^3e^x+x^4e^x$; $\qquad \Big(\frac{\cos(2x)}{1+x^2}\Big)'=\frac{-2\sin(2x)\cdot(1+x^2)-\cos(2x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$;

$\Big((1+x^2)^{\ln x}\Big)'=\Big(e^{\ln(1+x^2)\cdot\ln x}\Big)'=e^{\ln(1+x^2)\cdot\ln x}\Big(\ln(1+x^2)\cdot\ln x\Big)'=(1+x^2)^{\ln x}\big(\frac{1}{1+x^2}\cdot(2x)\cdot\ln x+\ln(1+x^2)\cdot\frac{1}{x}\big)$;

$\big(\operatorname{tg}(\cos(3x^2))\big)'=\frac{1}{\cos^2(\cos 3x^2)}\cdot(-\sin(3x^2))\cdot(6x)$. $\blacksquare$

5. Wykazać, że jeśli $0<\alpha<\beta<\pi$, to $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\beta-\alpha}>1$.

Rozw. Załóżmy najpierw, że $0<\alpha<\beta\le\frac{\pi}{2}$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje liczba $c\in(\alpha,\beta)$ taka, że $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\alpha-\beta}=(\operatorname{ctg})'(c)=\frac{-1}{\sin^2 c}$, czyli $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\sin^2 c}>1$. Ten sam argument działa, gdy $\frac{\pi}{2}\le\alpha<\beta<\pi$. Problem polega na tym, że może się zdarzyć, że $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ i wtedy mogłoby się zdarzyć, że $c=\frac{\pi}{2}$ i otrzymalibyśmy nierówność, ale nieostrą, bo $\sin\frac{\pi}{2}=1$. Na mocy tego co, już zostało wykazane, możemy napisać $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\alpha}>1$, czyli $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}-\alpha$. Analogicznie $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg}\beta>\beta-\frac{\pi}{2}$. Dodajemy te dwie nierówności stronami i otrzymujemy $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta>\beta-\alpha$, czyli $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\beta-\alpha}>1$, a to właśnie chcieliśmy wykazać. $\blacksquare$

7. Napisać równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(p,f(p))$, jeśli $f(x)=x^4-3x^3$, $p=(1,-2)$, $f(x)=\operatorname{tg} x$, $p=(-\frac{\pi}{3},-\sqrt{3})$.

Rozw. W pierwszym przypadku mamy $f'(x)=4x^3-9x^2$, zatem $f'(1)=4\cdot 1^3-9\cdot 1^2=-5$. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(1,-2)$ to prosta, której współczynnik kierunkowy równy jest $f'(1)=-5$ i na której leży punkt $(1,-2)$. Jej równanie to $y=-5\cdot(x-1)-2=-5x+3$. W drugim przypadku $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, więc $f'\big(-\frac{\pi}{3}\big)=\frac{1}{\cos^2(-\frac{\pi}{3})}=\frac{1}{(1/2)^2}=4$. Równanie ma więc postać $y=4\big(x-(-\frac{\pi}{3})\big)-\sqrt{3}=4x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. $\blacksquare$

6. Niech $f(t) = e^{-t}\big[a\cos\big(t\sqrt{3}\big) + b\sin\big(t\sqrt{3}\big)\big] + \frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{2\omega}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t)$ dla $t\in\mathbb{R}$. Znaleźć $f''(t) - 2f'(t) + 4f(t) - \cos(\omega t)$.

Rozw. Mamy $\big(e^{-t}\cos(t\sqrt{3})\big)' = -e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) - \sqrt{3}e^{-t}\sin(t\sqrt{3})$ oraz

$\big(e^{-t}\sin(t\sqrt{3})\big)' = -e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}e^{-t}\cos(t\sqrt{3})$. Z tych równości otrzymujemy

$\big(e^{-t}\cos(t\sqrt{3})\big)'' = e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - (\sqrt{3})^2e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) =$
$= e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - 3e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) = -2e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}e^{-t}\sin(t\sqrt{3})$. Obliczamy dalej
$\big(e^{-t}\sin(t\sqrt{3})\big)'' = e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - \sqrt{3}e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) - \sqrt{3}e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) - (\sqrt{3})^2e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) =$
$= e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) - 3e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) = -2e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}e^{-t}\cos(t\sqrt{3})$.
Zdefiniujmy teraz $g(t) = ae^{-t}\cos(t\sqrt{3}) + be^{-t}\sin(t\sqrt{3})$. Mamy $g''(t) - 2g'(t) + 4g(t) =$
$= a\big[-2e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - 2\big(-e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) - \sqrt{3}e^{-t}\sin(t\sqrt{3})\big) + 4e^{-t}\cos(t\sqrt{3})\big] +$
$+b\big[-2e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}e^{-t}\cos(t\sqrt{3}) - 2\big(-e^{-t}\sin(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}e^{-t}\cos(t\sqrt{3})\big) + 4e^{-t}\sin(t\sqrt{3})\big] =$
$=ae^{-t}\big[(-2+2+4)\cos(t\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}+2\sqrt{3})\sin(t\sqrt{3})\big] + be^{-t}\big[(-2+2+4)\sin(t\sqrt{3}) + (-2\sqrt{3}-2\sqrt{3})\cos(t\sqrt{3})\big] =$

$= 4e^{-t}\big[(a-b\sqrt{3})\cos(t\sqrt{3}) + (a\sqrt{3}+b)\sin(t\sqrt{3})\big]$. Niech teraz $h(t) = \frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{2\omega}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t)$.

Mamy $h'(t) = -\omega\frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t) + \omega\frac{2\omega}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t)$ oraz

$h''(t) = -\omega^2\frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t) - \omega^2\frac{2\omega}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t) = -\omega^2 h(t)$. Teraz możemy już dodać wszystkie człony:

$h''(t) - 2h'(t) + 4h(t) = (4-\omega^2)h(t) - 2h'(t) = \frac{(4-\omega^2)^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{2\omega(4-\omega^2)}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t) + 2\omega\frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t) -$

$-2\omega\frac{2\omega}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t) = \frac{(4-\omega^2)^2-4\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t) + 4\omega\frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t)$. Mamy $f(t) = g(t) + h(t)$, zatem
$f''(t) - 2f'(t) + 4f(t) - \cos(\omega t) = g''(t) - 2g'(t) + 4g(t) + h''(t) - 2h'(t) + 4h(t) - \cos(\omega t) =$

$= 4e^{-t}\big[(a-b\sqrt{3})\cos(t\sqrt{3}) + (a\sqrt{3}+b)\sin(t\sqrt{3})\big] + \frac{(4-\omega^2)^2-4\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t) + 4\omega\frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t) - \cos(\omega t) =$

$=4e^{-t}\big[(a-b\sqrt{3})\cos(t\sqrt{3}) + (a\sqrt{3}+b)\sin(t\sqrt{3})\big] + \frac{-5\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t) + 4\omega\frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t)$.

Wynik, jak widać, jest dosyć paskudny. Jest to rezultat dwu „drobnych" omyłek. Miało być $f(t) = e^{t}\big[a\cos\big(t\sqrt{3}\big) + b\sin\big(t\sqrt{3}\big)\big] + \frac{4-\omega^2}{(4-\omega^2)^2+4\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{2\omega}{(4-\omega^2)^2+4\omega^2}\sin(\omega t)$. Wtedy w wyniku otrzymalibyśmy 0, po mniej więcej takich samych rachunkach i przynajmniej wynik byłby znośniejszy. Celem jednak było wielokrotne sprawdzenie umiejętności wykonywania prostych przekształceń w większej liczbie, a wynik w tej chwili znaczenia większego nie ma. ■

8. Znaleźć największą wartość funkcji $f\colon[-1,4]\to\mathbb{R}$ określonej za pomocą wzoru
$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2.$$
Rozw. 1. $f'(x) = 4\cdot 3x^3 - 3\cdot 16x^2 + 2\cdot 18x = 4\cdot 3x(x^2-4x+3) = 12x(x-1)(x-2)$. Pochodna jest więc: dodatnia na przedziale $(2,4])$, ujemna na przedziale $(1,2)$, dodatnia na przedziale $(0,1)$ i ujemna na przedziale $(-1,0)$. Stąd od razu wynika, że funkcja rośnie (ściśle!) na przedziale $[2,4]$, na przedziale $[1,2]$ jest ściśle malejąca, na przedziale $[0,1]$ — ściśle rosnąca, na przedziale $[-1,0]$ — ściśle malejąca. Wynika stąd, że największa wartość to albo $f(-1) = 3+16+18 = 37$, albo $f(1) = 3-16+18 = 5$ albo $f(4) = 3\cdot 4^4 - 16\cdot 4^3 + 18\cdot 4^2 = (3-4)\cdot 4^4 + 18\cdot 4^2 = 4^2\cdot(-16+18) = 32$. Wobec tego $\max\limits_{x\in[-1,4]} f(x) = f(-1) = 37$.

Rozw. 2. Funkcja f jest ciągła na przedziale *domkniętym* $[-1,4]$, zatem z pewnością ma wartość największą w jakimś punkcie $p\in[-1,4]$. Jeśli p jest punktem wewnętrznym tego przedziału, to musi być $f'(p) = 0$, bo funkcja ma pochodną we wszystkich punktach wewnętrznych przedziału $[-1,4]$ (w końcach też, ale to nas nie interesuje!). Wynika stąd, że punkt p jest albo końcem przedziału $[-1,4]$, albo punktem krytycznym funkcji f, czyli punktem, w którym pochodna równa jest 0. Oznacza to, że największa wartość funkcji f to jedna z liczb $f(-1) = 37$, $f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = -8$, $f(4) = 32$, czyli liczba $f(-1) = 37$.
Uwaga. Z rozwiązania wynika, że najmniejszą wartością funkcji f jest $f(2) = -8$. ■

9. Wykazać, że jeśli $0 < a$, to równanie $\operatorname{tg} x = a(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ ma co najmniej jedno, a co najwyżej trzy rozwiązania spełniające nierówność $|x| < \frac{\pi}{2}$ oraz że

dla pewnej liczby $a_1 > 0$ równanie $\operatorname{tg} x = a_1(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ ma dokładnie jedno rozwiązanie spełniające warunek $|x| < \frac{\pi}{2}$;

dla pewnej liczby $a_2 > 0$ równanie $\operatorname{tg} x = a_2(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ ma dokładnie dwa rozwiązania spełniające warunek $|x| < \frac{\pi}{2}$;

dla pewnej liczby $a_3 > 0$ równanie $\operatorname{tg} x = a_3(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ ma dokładnie trzy rozwiązania spełniające warunek $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Rozw. Niech $f_a(x) = \operatorname{tg} x - a(x - \frac{\pi}{4}) - 1$. Mamy $f_a'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x - a$, $f_a''(x) = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. Wynika stąd, że $f_a''(x) = 0$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Jeśli $f_a'(x_1) = 0$ i $f_a'(x_2) = 0$, $|x_1|, |x_2| < \frac{\pi}{2}$, to na mocy twierdzenia Rolle'a (szczególny przypadek twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej) zastosowanego do funkcji f', istnieje punkt c leżący między x_1 i x_2 taki, że $f_a''(c) = 0$. Stąd wynika, że funkcja f' ma co najwyżej dwa pierwiastki w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Korzystając raz jeszcze z tego, że między każdymi dwoma pierwiastkami funkcji określonej i różniczkowalnej na przedziale znajduje się pierwiastek jej pochodnej, stwierdzamy, że funkcja f_a ma co najwyżej trzy pierwiastki w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Przyjmujemy $a_1 = 0$. Równanie $\operatorname{tg} x = a_1(x - \frac{\pi}{4}) + 1 = 1$ ma w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dokładnie jeden pierwiastek, bo na tym przedziale funkcja tg jest ściśle rosnąca i $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Przyjmujemy $a_2 = 2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}$. Jednym z pierwiastków równania $\operatorname{tg} x = 2(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ jest oczywiście $\frac{\pi}{4}$. Niech $f(x) = \operatorname{tg} x - \left(2(x - \frac{\pi}{4}) + 1\right)$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mamy $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x - 2 = \operatorname{tg}^2 x - 1$. Wobec tego $f'(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Wobec tego funkcja f jest ściśle malejąca na przedziale $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ i ściśle rosnąca na każdym z przedziałów $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$. W każdym z nich ma więc co najwyżej jeden pierwiastek. Teraz wystarczy przyjrzeć się wartościom w punktach $\pm\frac{\pi}{4}$ i granicom w punktach $\pm\frac{\pi}{2}$. Te ostatnie to oczywiście $\pm\infty$. $f(\frac{\pi}{4}) = 0$, $f(-\frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \pi - 2 > 0$. Wynika stąd, że funkcja f jest dodatnia na przedziale $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ i na przedziale $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ponieważ $f(-\frac{\pi}{4}) = \pi - 2 > 0$ i $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$, więc ma pierwiastek w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$, oczywiście dokładnie jeden jako ściśle monotoniczna. Wykazaliśmy zatem, że równanie $\operatorname{tg} x = 2(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste: jeden w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$, a drugim jest liczba $\frac{\pi}{4}$.

Przyjmijmy $a_3 = 12$. Niech $g(x) = \operatorname{tg} x - \left(12(x - \frac{\pi}{4}) + 1\right)$. Mamy $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \left(12(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + 1\right) = \sqrt{3} - 12\frac{\pi}{12} - 1 = \sqrt{3} - 2 < 0$ i $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty > 0$, zatem w przedziale $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcja g ma co najmniej jeden pierwiastek. $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, więc mamy drugi. $g(0) = 3\pi - 1 > 0$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty > 0$, zatem w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ funkcja g ma pierwiastek. To już trzeci, więc, zgodnie z tym co wykazaliśmy wcześniej, więcej już nie ma. $\boxtimes$

Uwaga. Rozumowanie świadczące o tym, że w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ są co najwyżej trzy pierwiastki można przedstawić bardziej geometrycznie. Będzie to jednak, w swej istocie, to samo rozumowanie, ale inaczej opowiedziane. **Czytać dalej należy robiąc sobie rysunki na kartce papieru, bo mowa jest o „geometrii".**

Na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcja tg jest ściśle wypukła, zatem jej wykres przecina jakąkolwiek prostą w co najwyżej dwóch punktach.

Na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, funkcja tg jest ściśle wklęsła, zatem również w tym przypadku prawdą jest, że ma co najwyżej dwa punkty wspólne z dowolną prostą.

Stąd wynika, że wykres funkcji tg (rozpatrywanej tylko na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) ma co najwyżej cztery punkty wspólne z prostą.

Należy jeszcze przekonać się, że czterech być nie może. Niech $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x_1 = a(x_1 - \frac{\pi}{4}) + 1$ oraz $\operatorname{tg} x_2 = a(x_2 - \frac{\pi}{4}) + 1$. Ze ścisłej wypukłości funkcji tg na przedziale $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ wynika, że współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $(x_1, \operatorname{tg} x_1)$ i $(x_2, \operatorname{tg} x_2)$ jest większy niż współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu tangensa w punkcie $(x_1, \operatorname{tg} x_1)$ a ten z kolei jest większy niż współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $(0,0)$ i $(x_1, \operatorname{tg} x_1)$. Z tego stwierdzenia wynika, że prosta przechodząca przez punkty $(x_1, \operatorname{tg} x_1)$ i $(x_2, \operatorname{tg} x_2)$ przecina poziomą oś układu współrzędnych na prawo od $(0,0)$.

Analogicznie wykazujemy, że prosta przecinająca „lewą” część wykresu funkcji tangens przecina poziomą oś układu współrzędnych na lewo od $(0,0)$. Stąd wynika od razu, że nie ma prostej, która przecina wykres funkcji tg — rozpatrywanej tylko na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ — w czterech punktach. ■