Klasówka 1, matematyka A, 9 listopada 2004

Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 90 minut

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.
Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.
Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!
Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!
Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Rozwiązać równanie: $\frac{1}{2}\log(x+3) = 1 - \frac{1}{2}\log(x+24)$.

2. Zdefiniować $\log_c y$ nie zapominając o założeniach o c i y. Niech $a = \log_{100} 2$, $b = \log_{10} 3$. Wyrazić za pomocą a i b: $\log_{10} 18$ i $\log_{10} 75$.

3. Rozwiązać równanie: $\log 2 - \log(y^2 - 4y + 5) = 1 - 2\log\sqrt{y^2 + 4y + 5}$.

4. Rozwiązać równanie: $2\log_3 \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = -1$.

5. Podać definicję kosinusa dowolnego kąta dodatniego. Rozwiązać nierówność: $\cos t \le -\frac{1}{2}$. Zilustrować rozwiązanie tej nierówności na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

6. Rozwiązać równanie: $\sin x = \cos 2x$.

7. Znaleźć następujące granice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^2-11n+5}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n-2n^2}{n^2-11n+5}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n-2n^{11}}{n^2-11n+5}.$$

8. Znaleźć granice $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{2n-1}}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100n+n^{100}}{1{,}01^n}$.

9. Niech $a_n = \left(1+\frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot 4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$. Podać liczbowe wartości wyrazów a_1, a_2, a_3. Wykazać, że ciąg (a_n) ma granicę skończoną.

inf. *Informacje przeróżne:*
$\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $1 + x \le e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$; $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, gdy $\frac{\pi}{2} > x > 0$.