Zadania szkolne dla studentów chemii

Podstawowe oznaczenia

$\mathbb{R}$ — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych

$\mathbb{N}$ — zbiór wszystkich liczb naturalnych, tj. liczb $0,1,2,3,\ldots$; $\mathbb{N}_*$ zbiór wszystkich liczb naturalnych *dodatnich*, tj. liczb $1,2,\ldots$

$\mathbb{Z}$ — zbiór wszystkich liczb całkowitych, tj. liczb $0,-1,1,-2,2,\ldots$

$\mathbb{Q}$ — zbiór wszystkich liczb wymiernych, tj. takich, które są ilorazami dwu liczb całkowitych.

$[a,b]$ — przedział domknięty, tzn. $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:\quad a\le x\le b\}$, czyli $[a,b]$ to zbiór złożony z tych wszystkich liczb rzeczywistych, które są jednocześnie większe lub równe a i mniejsze lub równe b.

$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:\quad a\le x<b\}$ — przedział domknięto–otwarty.

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:\quad a<x<b\}$ — przedział otwarty.

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:\quad a<x\le b\}$ — przedział otwarto–domknięty.

∞ lub $+\infty$ — ten symbol oznacza nieskończoność, to nie liczba, ale dodatkowy symbol.

$-\infty$ — ten symbol oznacza minus nieskończoność, to nie liczba, ale dodatkowy symbol.

Przyjmujemy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $-\infty<x<\infty$ oraz że $x+\infty=\infty$; $\infty-x=\infty$; $x-\infty=-\infty$; $-\infty-x=-\infty$; $\infty+\infty=\infty$; $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$; $\infty\cdot\infty=(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$; $\infty\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot\infty=-\infty$; jeśli $x>0$, to $x\cdot\infty=\infty$ i $x\cdot(-\infty)=-\infty$; jeśli $x<0$, to $x\cdot\infty=-\infty$ i $x\cdot(-\infty)=\infty$; $\frac{x}{\infty}=\frac{x}{-\infty}=0$; jeśli $x>1$, to $x^{\infty}=\infty$ i $x^{-\infty}=0$; jeśli $0<x<1$, to $x^{\infty}=0$ i $x^{-\infty}=\infty$.

Innych działań z udziałem symboli nieskończonych nie definiujemy, bo jak się później okaże nie miałoby to sensu, np. **nie** definiujemy $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, $\infty-\infty$, ∞^0 oraz $\frac{0}{0}$, 0^0.

Końcem przedziału może być symbol nieskończony. Jeśli jeden z końców jest nieskończony, to przedział nazywany jest półprostą; jeśli oba końce są nieskończone — prostą.

Uwaga 1. Niektóre oznaczenia odbiegają od stosowanych w polskich liceach, ale musimy stosować oznaczenie przyjęte na całym świecie, bo na ich stosowanie poza szkołami w RP (nr 3,4, ...) polscy specjaliści od dydaktyki wpływu nie mają, a nauka jest międzynarodowa. W szczególności symbol $\mathbb{C}$, który zaczniemy używać w drugim semestrze, oznacza na całym świecie zbiór liczb zespolonych i **nie wolno** nim oznaczać zbioru liczb całkowitych! ■

Wykrzyknikiem są oznaczone te zadania, które każdy koniecznie powinien zrobić.

1. Obliczyć: (a) $\frac{8\cdot4\frac14-11\frac15:9\frac13-\left(-2\frac13\right):\frac53}{14:2\frac29+8\frac25\cdot1\frac27}$, (b) $0{,}05-\frac{\left(2\frac45-1{,}9\right):3\frac34}{\left[3\frac16-(-1{,}25)\right]\cdot24+(-58)}$.

2. Obliczyć: (a) $\frac{30\cdot4\frac14+11\frac15:5\frac35}{14:2\frac29+8\frac25\cdot14\frac23}:\frac{1:6+12:5}{2\frac12\cdot15-4\frac{13}{15}\cdot7\frac35}$, (b) $\left[2{,}1:\frac{\left(4{,}5\cdot1\frac23+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{1-\frac{10}{27}:\frac56}\right]:2{,}5$.

3. Obliczyć: a) $(\frac25:2\frac12)\cdot(4\frac15-1\frac{3}{40})+1{,}35:2{,}7$, b) $\frac{0{,}1}{(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}):18\frac16}$.

4. Obliczyć: a) $\frac{(3\frac{1}{12}+4{,}375):19\frac89}{2\frac58-\frac23\cdot2\frac{5}{14}}$, b) $\frac{1:5}{(83\frac58-85\frac{7}{20})]\cdot2\frac23}$.

5! Obliczyć używając jedynie głowy własnej, kartki i ołówka (dwa ostatnie elementy nie są konieczne, kalkulatory oraz komputery są chwilowo zakazane)

a) $\frac{12\frac{20}{29}\cdot3{,}625+28:\frac{7}{15}}{\frac{20}{49}\cdot9{,}8+0{,}625:0{,}175}:0{,}08$ b) $\frac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\frac{1:\frac14}{1\frac35\cdot\frac58}$

c) $\left(\frac{1{,}4\cdot 0{,}15}{0{,}75-0{,}03:\frac{5}{100}} - \left(0{,}0(6)+1{,}1\right):1{,}1(6)\right):\frac{85}{100}+471\frac{9}{17}$

6! Zmieszano 2 kg stopu o zawartości 25% miedzi i 3 kg stopu o zawartości 40% miedzi. Ile procent miedzi zawiera otrzymany stop?

7. Zmieszano a kg stopu o zawartości $p\,\%$ miedzi i b kg stopu o zawartości $q\,\%$ miedzi. Ile procent miedzi zawiera stop?

8. Cenę towaru obniżono najpierw o 20%, a następnie nową cenę podwyższono o 20%. Jaką częścią ceny początkowej jest końcowa cena?

9! Ponumerowano strony w książce. Użyto w tym celu 6869 znaków drukarskich (1 znak drukarski to jedna cyfra). Ile stron ma książka?

10! (Zadanie hrabiego Lwa Tołstoja, znanego (kiedyś?) pisarza). Kosiarze mają skosić dwa pola zboża większe i mniejsze. Pracują jednakowo wydajnie i równomiernie. Zaczęli wszyscy kosić większe pole. W połowie dnia pracy podzielili się: połowa została na większym polu skosiła je do końca wieczorem. Reszta przeszła na mniejsze pole, dwa razy mniejsze od pierwszego. Ilu kosiarzy pracowało, jeśli następnego dnia przyszedł na mniejsze pole tylko jeden i w ciągu całego drugiego dnia skosił je do końca.

11. Do licznika i do mianownika ułamka $\frac{a}{b}$, $a,b>0$ dodano tę samą liczbę 1000. Otrzymana liczba jest większa od $\frac{a}{b}$. Jaki jest znak liczby $1-\frac{a}{b}$, a jaki liczby $1-\frac{a+1000}{b+1000}$?

12. Pies goni lisa. Początkowa odległość między nimi równa była 30 m. Długość każdego skoku psa równa jest 2 m, lisa – 1 m. W czasie, w którym lis wykonuje trzy skoki, pies skacze dwa razy. Po przebiegnięciu jakiego dystansu pies dogoni lisa?

13. Suma dwu liczb równa jest 527, a 8% pierwszej liczby to $7{,}5\%$ drugiej. Jakie to liczby?

14. Uprościć wyrażenia:

a) $2{,}5x^2-[0{,}6x^2-(3{,}5x+x^2)-(x^2+3x)]+[0{,}1x^2-(x^2-3{,}5x)+x^2]$,

b) $x-1{,}4xy+1{,}2y-\{1{,}6xy-[0{,}6y-(1{,}4x-2{,}4xy)]-(1{,}4xy-16y)\}$,

c) $2{,}6x-\{1{,}8y-[2{,}2x-(y-0{,}6x)+1{,}4y]-(1{,}6x-0{,}2x)\}$,

d) $3x[5y-(7x-4y)]-8y[3x-(7y-5x)+(6x-11y)]$,

e) $3(m-1)^2+(m+2)(m^2-2m+4)-(m+1)^3$,

f) $(a-1)^3-4a(a+1)(a-1)+3(a-1)(a^2+a+1)$,

g) $(a^2-3)^3-(a-2)(a^2+4)(a+2)$,

h) $(2a-3)^3-4a(2a+3)(2a-3)+(3-2a)^2$,

i) $(x^2-1)(x^4+x^2+1)-(x^2-1)^3$.

j) $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy}$,

15! Dla jakich liczb (par liczb) prawdziwe są równości

a) $|x|+5=|x+5|$, b) $|x|\cdot|y|=|xy|$, c) $|x|-|y|=0$,

d) $|2x+1|=1$, e) $|3-x|=4$, f) $|x|+|x+1|=3$.

g) $|x-3|=x-3$, h) $|x+2|=-x-2$, i) $|2x-6|=6-2x$,

j) $\sqrt{(x-4)^2}=x-4$, k) $|x|+|x+2|=2$, l) $|x-4|+|x+a|=5$.

16. Uprościć wyrażenia

a) $x+|1-x|+2|x-2|$, gdy $1<x<2$,

b) $|x|+|x+1|+|x-2|$, gdy $x<-1$,

c) $|x-1|+\frac{x}{|x|}-|x+1|$, gdy $x<-2$.

17. Z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika, że $\sqrt{x^2}=|x|$. Korzystając z tego wzoru uprościć

a) $\sqrt{x^2}+x$,

b) $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{x^2}$,

c) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$ gdy $b\neq 0$,

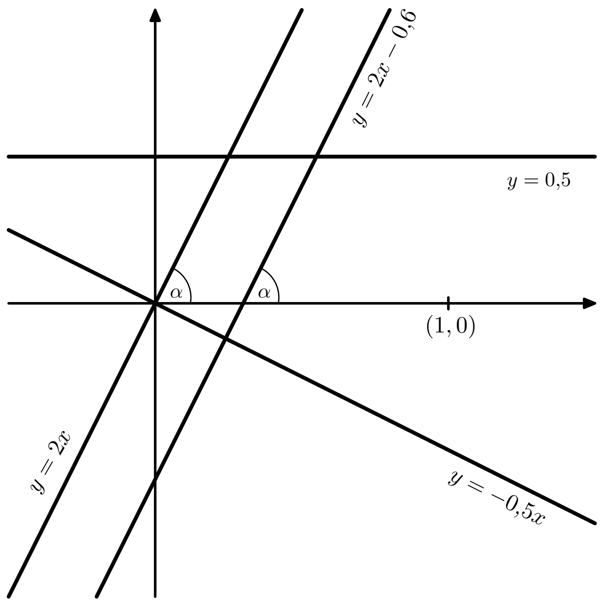
d) $\sqrt{x^2-6x+9}+x$.

Funkcją liniową nazywamy funkcję postaci $y=ax+b$, a i b są tu dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Jeśli np. $a=0$, $b=-3$, to otrzymujemy $y=-3$, więc funkcja w tym przypadku jest stała. Oznacza to, że jej wartość nie zależy od wyboru punktu x.

Jeśli $a=2$, $b=-1$, to otrzymujemy funkcję $y=2x-1$. Tym razem jej wartość zależy od wyboru argumentu x. Jeśli $x=0$, to $y=-1$, jeśli $x=1$, to $y=1$, jeśli $x=-1$, to $y=-3$ itd.

Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta. Jak wiadomo przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna linia prosta. Wobec tego dla narysowania wykresu funkcji liniowej wystarczy znaleźć dwa jego różne punkty. Zauważmy, że proste $y=ax$ i $y=ax+b$ nie mają ani jednego punktu wspólnego, gdy $b\neq 0$, albo, gdy $b=0$, pokrywają się. Wobec tego, że leżą w jednej płaszczyźnie, są równoległe.



Na rysunku $a=2$ w przypadku pary prostych równoległych i $a=-\frac{1}{2}$ w przypadku trzeciej prostej.

Jeśli $a\neq A$, to dwie proste o równaniach $y=ax+b$ i $y=Ax+B$ mają dokładnie jeden punkt wspólny. Jeśli punkt (x,y) ma leżeć na obu tych prostych, to musi być spełniony warunek $ax+b=Ax+B$, więc $x=\frac{B-b}{a-A}$. Wtedy $y=a\frac{B-b}{a-A}+b=\frac{aB-bA}{a-A}$, więc jedynym punktem wspólnym tych dwu prostych jest punkt $\left(\frac{B-b}{a-A},\frac{aB-bA}{a-A}\right)$. Oczywiście nie ma żadnej potrzeby zapamiętywać tego wzoru Zawsze, gdy tylko będzie zmuszeni do znalezienia punktu wspólnego dwu prostych o znanych równaniach, będziemy mogli rozwiązać układ równań.

Bez trudu można zauważyć, że im większa jest liczba $a>0$, tym bardziej stroma jest prosta o równaniu $y=ax+b$. Wystarczy przyjrzeć się prostym przechodzącym przez punkt $(0,0)$, bo prosta $y=ax+b$ jest równoległa do prostej $y=ax$, która przechodzi przez punkt $(0,0)$.

Prosta $y=ax$ przechodzi przez punkt $(1,a)$, który znajduje się tym wyżej, im większa jest liczba a.

Zauważmy, że trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1,a)$ jest prostokątny (kąt przy wierzchołku $(1,0)$ jest prosty). Oznaczmy kąt przy wierzchołku $(0,0)$ przez α. Przypomnijmy, że tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym to stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw wierzchołka tego kąta do drugiej przyprostokątnej. Wobec tego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{1} = a$. Wykazaliśmy więc, że jeśli $a > 0$, to tangens kąta ostrego, którego jedno ramię jest zawarte w osi OX, a drugie w prostej $y = ax$ jest równy a.

Jeśli $a < 0$, to długości przyprostokątnych równe są 1 i $|a| = -a$. Wobec tego w tym przypadku tangens kąta ostrego, którego jedno ramię jest zawarte w osi OX, a drugie w prostej $y = ax$, jest równy $|a| = -a$. Zwiększając liczbę x , **zmniejszamy** liczbę $y = ax + b$ — prosta skierowana jest ,,w dół", a nie w górę, jak poprzednio. Widzimy, że jest ona tym bardziej stroma, im większa jest liczba $|a|$.

Definicja 2. (współczynnika kierunkowego prostej)
Liczbę rzeczywistą a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej o równaniu $y = ax + b$. ■

18! Zacieniować zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunki:

a) $x \geq 3$ i $y < 2$, b) $1 < x < 3$ i $-2 < y < 2$,
c) $x = 3$ i $y \geq 3$, d) $x = 2$ i $y = -2$,
e) $4 \geq x > 2$ i $-2 \leq y < 3$, f) $x = 2$ lub $x = 4$ oraz $y < 4$,
g) $x^2 > y^2$, h) $y > (x-1)(x+2)$,
i) $(2x - y + 2)(x + 3y - 4) > 0$, j) $(x-y)(2x+y)(3x-y) < 0$,
k) $x^3 < x^2 < y^2$, ℓ) $y^2 + 3x^2y - y^3 > 0$.

19. Rozwiązać układy równań i zilustrować rozwiązanie rysunkiem:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ -5x + 3y = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ -4x + 3y = -29 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 2x - 8y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x - 3y = 10 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = -5 \\ 3x - \frac{1}{2}y = \frac{9}{2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = \frac{23}{12} \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = \frac{37}{6} \end{cases}$

20! Dla jakich wartości parametru m każdy z układów równań:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + my = 2m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = m - 1 \\ 2x - y = 3 - m \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ mx - y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = m + 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

jest układem równań niezależnych, zależnych, sprzecznych.

21. Rozwiązać układy równań, w szczególności ustalić liczbę rozwiązań w zależności od parametru a.

a) $\begin{cases} 3x + ay = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ ax + 12y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - ay = 1 \\ 2x + 3ay = 19 \end{cases}$

22. Dla jakich wartości parametru k punkt przecięcia się prostych $y = 2x + k - 5$ i $y = 3x - 2k + 1$ leży wewnątrz kwadratu o wierzchołkach: $A = (0,0)$, $B = (0,3)$, $C = (3,3)$, $D = (3,0)$?

23. Dla jakich wartości parametru k rozwiązanie układu $\begin{cases} x - y = k - 1 \\ 2x - y = 3 - k \end{cases}$ jest:

a) parą liczb ujemnych, b) parą liczb dodatnich, c) parą liczb o przeciwnych znakach?

24! Rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y - \ \ z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} -9x + 5y + 19z = 15 \\ \ \ 3x + \ \ y - \ \ \ z = 3 \\ -2x + \ \ y + \ \ 4z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -9x + 5y + 19z = 5 \\ \ \ 3x + \ \ y - \ \ \ z = 3 \\ -2x + \ \ y + \ \ 4z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2-13) + 2x(2x-3y) = 0 \\ -3(x^2+y^2-13) + 2y(2x-3y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-65 \ + 2x(x-8y) = 0 \\ -8(x^2+y^2-65) + 2y(x-8y) = 0 \end{cases}$$

Wielomiany kwadratowe

Definicja 3. (wielomianu kwadratowego)
Wielomian ax^2+bx+c nazywamy kwadratowym lub wielomianem drugiego stopnia, jeśli a jest liczbą różną od 0. ■

W dalszym ciągu zakładamy, że $a \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

Możemy napisać

$$ax^2+bx+c = a\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2 - a\cdot\tfrac{b^2}{4a^2} + c = a\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c =$$

$$\xlongequal[\text{kreskę}]{\text{na wspólną}} a\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a} \xlongequal[\text{nawias}]{\text{przed}} a\Big[\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}\Big].$$

Wyrażenie $\Delta = b^2-4ac$ zwane jest wyróżnikiem wielomianu kwadratowego.

Przykładowo $x^2+4x+3 = (x+2)^2-1$, tu $a=1$, $b=4$, $c=-3$. Nie zastosowaliśmy żadnych wzorów widocznych wyżej. Po prostu od razu widzimy, że $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, więc wyrażenie to różni się od wielomianu x^2+4x+3 o 1. Analogicznie

$$2x^2+7x+1 = 2\big(x+\tfrac{7}{4}\big)^2 - 2\cdot\tfrac{49}{16} + 1 = 2\big(x+\tfrac{7}{4}\big)^2 - \tfrac{49-8}{8} = 2\big(x+\tfrac{7}{4}\big)^2 - \tfrac{41}{8}.$$

Z otrzymanego wzoru wynika od razu, że najmniejszą wartością wyrażenia $2x^2+7x+1 = 2\big(x+\frac{7}{4}\big)^2 - \frac{41}{8}$ jest liczba $-\frac{41}{8}$ otrzymana dla $x=-\frac{7}{4}$, bowiem $2\big(x+\frac{7}{4}\big)^2 \geq 0$, przy czym ta nierówność staję się równością jedynie, gdy $x=-\frac{7}{4}$, bo kwadraty liczb rzeczywistych różnych od 0 są dodatnie, a $0^2=0$. Jasne jest również, że jeśli $x=-\frac{7}{4}+u$ i $\hat{x}=-\frac{7}{4}-u$, to

$$2x^2+7x+1 = 2u^2 - \tfrac{41}{8} = 2(-u)^2 - \tfrac{41}{8} = 2\hat{x}^2+7\hat{x}+1.$$

Innymi słowy: niezależnie od tego, czy odsuniemy się of liczby $-\frac{7}{4}$ o u w prawo, czy w lewo, wartość wyrażenia $2x^2+7x+1$ jest taka sama. Prosta $x=-\frac{7}{4}$ jest więc osią symetrii wykresu funkcji $2x^2+7x+1$.

Przeprowadzone rozumowanie można zastosować do każdego wielomianu kwadratowego. Funkcja $ax^2+bx+z = a\Big[\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big]$ przyjmuje tę samą wartość dla $x=-\frac{b}{2a}+u$ i dla $\hat{x}=-\frac{b}{2a}-u$, co oznacza, że prosta o równaniu $x=-\frac{b}{2a}$ jest osią symetrii wykresu tej funkcji kwadratowej.

Oczywiście najmniejszą wartością wyrażenia $\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ jest liczba $-\frac{\Delta}{4a^2}$, którą otrzymujemy przyjmując $x=-\frac{b}{2a}$. Stąd wynika od razu, że jeśli $a>0$, to **najmniejszą** wartością wyrażenia $ax^2+bx+c = a\Big[\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big]$ jest liczba $-a\cdot\frac{\Delta}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a}$. Mnożenie przez liczby ujemne zmienia kierunek nierówności, jeśli więc $a<0$, to liczba $-\frac{\Delta}{4a}$ jest **największą** wartością wyrażenia ax^2+bx+c.

Jasne jest też, że wyrażenie $ax^2+bx+c = a\Big[\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big]$ jest: zawsze dodatnie, jeśli $a>0$ i $\Delta<0$; zawsze ujemne, gdy $a<0$ i $\Delta<0$. Jeśli $\Delta=0$, to wyrażenie ma ten sam znak we wszystkich punktach z wyjątkiem $x=-\frac{b}{2a}$, bo w tym punkcie (i tylko w tym) jego wartością jest liczba 0.

Jeśli $\Delta>0$, to w punktach $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, symetrycznych względem prostej $x=-\frac{b}{2a}$, wartością funkcji jest 0. Jeśli dodatkowo założymy, że $a>0$, to będziemy mogli stwierdzić, że

$$\text{jeśli } \left|x+\tfrac{b}{2a}\right|<\tfrac{\Delta}{2a}\text{, to } ax^2+bx+c=a\Big[\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\Big]<0,$$

$$\text{jeśli } \left|x+\tfrac{b}{2a}\right|>\tfrac{\Delta}{2a}\text{, to } ax^2+bx+c=a\Big[\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\Big]>0.$$

Jest nieomal oczywiste, że w przypadku $a<0$ odpowiedni wniosek wygląda tak:

$$\text{jeśli } \left|x+\tfrac{b}{2a}\right|<\tfrac{\Delta}{2a}\text{, to } ax^2+bx+c=a\Big[\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\Big]>0,$$

$$\text{jeśli } \left|x+\tfrac{b}{2a}\right|>\tfrac{\Delta}{2a}\text{, to } ax^2+bx+c=a\Big[\big(x+\tfrac{b}{2a}\big)^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\Big]<0.$$

25. Napisać równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są

1 i -1, $\quad 1$ i 2, $\quad 2$ i $\frac{1}{2}$, $\quad 2-\sqrt{2}$ i $2+\sqrt{2}$,

2 i -3, $\quad \pi$ i 2, $\quad \sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, $\quad 5-\sqrt{7}$ i $5+\sqrt{7}$.

26! Rozwiązać równanie kwadratowe sprowadzając je trójmian kwadratowy do postaci kanonicznej

$x^2+3x+2=0$, $\quad x^2+4x+3=0$, $\quad x^2-4x+3=0$.

$x^2+3x+1=0$, $\quad x^2+3x+3=0$, $\quad x^2+3x+\frac{9}{4}=0$,

$-2x^2+3x+1=0$, $\quad -2x^2+3x-1=0$, $\quad -2x^2+3x-\frac{9}{8}=0$.

27. Napisać wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y=x^2-5x+6$ względem:

a) osi x, b) osi y, c) prostej $x=2\frac{1}{2}$, d) prostej $y=2$.

28! Napisać wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y=x^2-4$ względem:

a) osi x, b) osi y, c) punktu $(0,0)$, d) prostej $y=-2$.

29. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $y=2x^2$, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $y=2x^2-4$, b) $y=2(x-3)^2$, c) $y=2(x+3)^2-6$,

d) $y=2(x+1)^2-2x-6$, e) $y=2x^2+6x$, f) $y=2x^2+6x-8$?

30. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y=|x-4|$, b) $y=|-5x+6|$,

c) $y=|x|+|x-1|$, d) $y=|x|-|x-1|$,

e) $y=2x-3|x+1|+\frac{1}{2}|x-2|$, f) $y=|2x-1|+|2x+1|+2x$.

31. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y=|x^2-4x+3|$, b) $y=x^2+|-5x+6|$,

c) $y=|x|+|1-x^2|$, d) $y=2x^2+|x|-1$,

e) $y=|x^2-x|+1-x$, f) $y=|x^2|+|x|$,

g) $y=|x^2-4|-4$, h) $y=-|x^2-2|$,

i) $y=|x^2+1|+|x|$, j) $y=x^2-5|x|+6$.

32! Znaleźć odległość punktu $(1,1)$ od prostej $2x-3y+5=0$, czyli

33. Znaleźć odległość prostej $2x-y+7=0$ od prostej $4x-2y+10=0$.

34. Dla jakich $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ suma kwadratów pierwiastków równania $2ax^2-(2+a)x+1=0$ jest większa niż 1?

35. Niech A będzie zbiorem złożonym ze wszystkich punktów, których odległość od punktu $(1,4)$ jest równa ich odległości od prostej $y=-4$. Wykazać, że A jest wykresem funkcji kwadratowej (parabolą). Znaleźć wierzchołek i oś symetrii tej paraboli.

36. Dane są równania $4px^2-2x-p=0$ i $(k+2)x^2+(k+8)x+\frac{1}{2}=0$.

a) Dla jakich p,k te równania mają pierwiastki rzeczywiste?

b) Dla jakich p, k suma pierwiastków każdego z tych 2 równań równa jest iloczynowi pierwiastków drugiego równania?

37. Niech $W(x) = x^3 + (m-6)x^2 + (m-7)x$.

a) Dla jakich $m \in \mathbb{R}$ pierwiastki wielomianu W tworzą ciąg arytmetyczny?

b) Niech m będzie najmniejszą z liczb spełniających warunek z punktu a. Rozwiązać równanie; $W(x) - 2 = x^3 - x^2 - x + \lfloor x \rfloor$ przyjmując, że $\lfloor x \rfloor$ to największa liczba całkowita $\leq x$.

38! Niech $W(x) = x^2 - mx + m^2 - 2m + 1$.

a) Dla jakich $m \in \mathbb{R}$ wielomian W ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest większa od iloczynu?

b) Niech $m \in \mathbb{Z}$ będzie tą wartością parametru m, dla której spełniony jest warunek a. Naszkicować wykres funkcji $g(x) = \lfloor W(x) \rfloor$ przyjmując, że $-2 \leq x \leq 2$ zaś $\lfloor x \rfloor$ to największa liczba całkowita mniejsza lub równa x.

Załóżmy, że $a \neq 0$ oraz że $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$. Wtedy dla dowolnej liczby x zachodzi równość

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c - \left(ax_1^2 + bx_1 + c\right) = a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1) =$$
$$= (x - x_1)\left[a(x + x_1) + b\right] = a(x - x_1)\left[x + x_1 + \tfrac{b}{a}\right].$$

Przyjmijmy $x_2 = -x_1 - \frac{b}{a}$. Wtedy $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Okazuje się więc, że znając jeden pierwiastek wielomianu kwadratowego możemy natychmiast znaleźć drugi. Otrzymaliśmy też znany wzór $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, zwany na ogół wzorem Viète'a. Drugi otrzymujemy zastępując we wzorze $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ zmienną x przez liczbę 0: $c = a(-x_1)(-x_2) = ax_1x_2$, czyli $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Otrzymaliśmy wzory Viète'a nie korzystając z wzorów na pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, choć oczywiście mogliśmy ich użyć. Jednak wyprowadzenie, które pokazaliśmy, działa również w przypadku równań wyższego stopnia, a wzory na pierwiastki równania trzeciego oraz czwartego stopnia są na tyle skomplikowane, że praktycznie nie używane. Wzorów na pierwiastki równań wyższych stopni w ogóle nie ma. Na przełomie XVIII i XIX wieku udowodniono, że nie istnieją wzory na pierwiastki równania stopnia piątego i wyższych.

Można bez trudu dowieść, że liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ — udowodniliśmy wyżej jedynie wynikanie w jedną stronę. Jeśli $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, to $x_1(-x_1 - \frac{b}{a}) = \frac{c}{a}$, zatem po pomnożeniu obu stron tej równości przez $-a$ i przeniesieniu wszystkich składników na lewą stronę otrzymujemy: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, więc wykazaliśmy, że x_1 jest pierwiastkiem równania $ax^2 + bx + c = 0$. W taki sam sposób moglibyśmy przekonać się, że liczba x_2 jest pierwiastkiem tego równania kwadratowego.

Słowo *parabola* w zadaniach oznacza *wykres funkcji kwadratowej*.

39! Odgadnąć pierwiastki równania kwadratowego:

(a) $x^2 - 3x + 2 = 0$, (b) $x^2 + 3x + 2 = 0$,
(c) $x^2 + 4x + 4 = 0$, (d) $x^2 - x - 6 = 0$,
(e) $x^2 + x - 6 = 0$, (f) $x^2 - 6x + 8 = 0$,
(g) $x^2 + 6x + 8 = 0$, (h) $8x^2 + 6x + 1 = 0$,
(i) $2x^2 - 3x + 1 = 0$, (j) $2x^2 + 3x + 1 = 0$,
(k) $3x^2 - 5x + 2 = 0$, (l) $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

40! Dowieść, że środki wszystkich tych odcinków równoległych do prostej $y = 2x - 5$, których oba końce leżą na paraboli o równaniu $y = 2x^2 - 13x + 7$, znajdują się na jednej prostej. Czy każdy punkt tej prostej jest środkiem jednego z opisanych odcinków?

41. Wykazać, że jeśli suma odległości punktu (x, y) od punktów $(0, \sqrt{5})$ i $(0, -\sqrt{5})$ jest równa 6, to $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Czy z tego, że $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ wynika, że suma odległości punktu (x, y) od punktów $F_1 = (0, \sqrt{5})$ i $F_2 = (0, -\sqrt{5})$ jest równa 6?

42. Dowieść, że środki wszystkich tych odcinków równoległych do prostej $y = 2x - 5$, których oba końce leżą na elipsie o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, znajdują się na jednej prostej. Czy każdy punkt tej prostej jest środkiem jednego z opisanych odcinków? Znaleźć wszystkie proste równoległe do prostej $y = 2x - 5$, które mają dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

43. Niech $F_1 = (0, \sqrt{5})$, $F_2 = (0, -\sqrt{5})$ i $A = \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$. Znaleźć prostą ℓ przechodzącą przez punkt A, której jedynym punktem wspólnym z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ jest punkt A. Wykazać, że kąt między odcinkiem F_1A i prostą ℓ równy jest kątowi między odcinkiem F_2A i prostą ℓ.

44! Ile punktów wspólnych z parabolą może mieć prosta?

45. Wykazać, że parabola $y = x^2$ jest podobna do paraboli $y = 9x^2$.

46. Ile punktów wspólnych z okręgiem może mieć wykres funkcji kwadratowej?

47. Ile punktów wspólnych ze sobą mogą mieć dwie parabole?

48. Ile punktów wspólnych mogą mieć elipsa o równaniu $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ i okrąg, którego równaniem jest $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$?

49! Bez rozwiązywania równania $3x^2 + 17x - 14 = 0$ znaleźć wartość wyrażenia $\frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2}$, x_1, x_2 oznaczają tu pierwiastki równania $3x^2 + 17x - 14 = 0$.

50. Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2. Znaleźć równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są

(a) liczby x_1^2 i x_2^2,

(b) liczby $-x_1$ i $-x_2$,

(c) liczby $\frac{1}{x_1}$ i $\frac{1}{x_2}$,

(d) liczby $2x_1$ i $2x_2$.

51. Dla jakich liczb λ równanie $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 2 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

52. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 - ax + a - 1 = 0$. Dla jakiego $a \in \mathbb{R}$ liczba $x_1^2 + x_2^2$ jest najmniejsza?

53. Znaleźć odległość punktu $(1, 2)$ od prostej o równaniu $x - 3y + 2 = 0$.

54. Niech $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$. Wykazać, że zbiór złożony z punktów leżących nad parabolą $y = ax^2 + bx + c$ jest wypukły.

55! Dla jakiej liczby x wyrażenie

$$(x - 1)^2 + (x - 3)^2 + (x - 5)^2 + (x - 7)^2 + (x - 9)^2 + \\ + (x - 11)^2 + (x - 13)^2 + (x - 15)^2 + (x - 17)^2 + (x - 19)^2$$

przyjmuje najmniejszą wartość?

56. Wykazać, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, to zachodzi równość $(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$.

57. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste różnych znaków?

58. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie $ax^2 + bx + c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste, między którymi znajduje się liczba 1?

59. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie $ax^2+bx+c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma jest równa ich iloczynowi?

60. Wyznaczyć liczbę pierwiastków równania $x^4 + 2(m-4)x^2 + 4 = 0$ w zależności od parametru m?

61. Wyznaczyć liczbę pierwiastków równania $x^4 + (2m-4)x^2 - m^2 + 4m - 2 = 0$ w zależności od parametru m?

62. Wykazać, że jeśli $x^3 + 2px + q = 0$, to $xq \leq p^2$.

63. Wykazać, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $x + y = 1$, to $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$.

64. Znaleźć jak najprostsze równanie kwadratowe, którego wyróżnik Δ jest równy

$$(ap + bq + cr)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(p^2 + q^2 + r^2)$$

i wykazać, że $\Delta \leq 0$.

65. Wyrażenie $\sqrt{x-1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x-1}}$ jest stałe na pewnym przedziale. Znaleźć ten przedział.

66. Niech m, n będą liczbami naturalnymi. Wykazać, że liczba $\sqrt{2}$ leży między liczbami $\frac{m}{n}$ i $\frac{m+2n}{m+n}$.

67. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x - |y+1| = 1, \\ x^2 + y = 10. \end{cases}$

68. Znaleźć wszystkie takie liczby rzeczywiste x, dla których zachodzi nierówność

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geq \frac{2}{3}.$$

Dwumian Newtona

Wiadomo, że $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Wobec tego możemy napisać:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + \\
&\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

Analogicznie:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + \\
&\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Wreszcie:

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b) &= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + \\
&\quad + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5 = \\
&= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.
\end{aligned}$$

Z tych przykładów widać, że w rozwinięciu $(a+b)^n$ występuje $n+1$ składników: a^n, następnie kolejne iloczyny $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, ..., ab^{n-1} z jakimiś współczynnikami i na końcu b^n. Jeśli kolejne współczynniki przy tych iloczynach oznaczymy przez $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n-1}$ i dla osiągnięcia pełnej jednolitości wprowadzimy jeszcze dwa symbole $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, to rozumując dokładnie tak, jak poprzednio, dojdziemy do wniosku, że

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Np. $4 = \binom{4}{1} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} = 1+3$, $6 = \binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3+3$, $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = =6+4 = 10$, $\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10+5 = 15$.

Blaise Pascal wpadł na pomysł, by zapisywać współczynniki rozwinięcia $(a+b)^n$ w kolejnych wierszach trójkąta nazwanego później jego nazwiskiem:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Wypisaliśmy pierwszych sześć wierszy trójkąta Pascala, oczywiście można wypisywanie kontynuować, ale zapewne każdy już widzi, jaki jest mechanizm tworzenia następnego wiersza z danego. Zapiszmy jeszcze tylko wzór

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^2 + 5ab^4 + b^5\,,$$

by raz jeszcze pokazać, jaki związek trójkąta Pascala z potęgowaniem dwumianu $a+b$.

Przypomnijmy, że $0! = 1$ (z definicji). $1! = 1$ oraz $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$ dla $n = 0,1,2,3,\ldots$ Wtedy można napisać, że $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dla $k = 0,1,2,\ldots,n-1,n$. Oczywiście wymaga to uzasadnienia. Można zauważyć, że jest tak dla $n = 0,1$. Jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n i wszystkich liczb $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1,n\}$, to

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\cdot\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\cdot\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \frac{n!\cdot(n+1)}{k!(n-k-1)!(n-k)(k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Ponieważ twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$, więc jest prawdziwe dla $n = 2$. Ponieważ jest prawdziwe dla n=2, więc jest prawdziwe dla $n = 3$ itd.

Zauważmy jeszcze, że jeśli $0 < k < n$, to $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}$. W tym wzorze w mianowniku jest iloczyn k czynników i tyleż samo jest ich w liczniku. Możemy napisać:

$$(a+b)^n = a^n + \tfrac{n}{1}a^{n-1}b + \tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \tfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)}ab^{n-1} + b^n\,.$$

Spójrzmy teraz na iloczyn

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)(x_3+y_3) = (x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2)(x_3+y_3) =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + y_1y_2x_3 + x_1x_2y_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2y_3\,.$$

Widzimy, że po wymnożeniu otrzymaliśmy 8 składników. Każdy z nich jest iloczynem trzech liczb: pierwszy czynnik wzięty jest z pierwszego nawiasu, drugi — z drugiego, a trzeci — z trzeciego. Przyjmując $x_1 = x_2 = x_3 = a$ i $y_1 = y_2 = y_3 = b$ otrzymujemy

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aba + baa + bba + aab + abb + bab + bbb = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,.$$

Zauważmy, że wśród ośmiu składników trzy z nich zawierają dwa iksy i jeden igrek. Po prostu z trzech nawiasów wybieramy jeden, z wybranego nawiasu wybieramy drugi składnik, a z niewybranych — pierwszy. To można zrobić na trzy sposoby. Dlatego współczynnik przy a^2b jest równy liczbie sposobów, na które można wybrać jeden przedmiot spośród trzech danych Współczynnik przy a^4b^2 w rozwinięciu $(a+b)^6$ jest równy liczbie sposobów wyboru dwóch spośród sześciu nawiasów: z wybranych do iloczynu wejdzie b, a z pozostałych — a. Można też spojrzeć na ten współczynnik nieco inaczej. Mamy wybrać dwa z sześciu nawiasów. Pierwszy nawias możemy wybrać na 6 sposobów, a drugi na 5, bo wybieramy z pozostałych pięciu. Wobec tego mamy $6\cdot 5$ możliwości. Ale w ten sposób znajdujemy **uporządkowane** pary, a mieliśmy znajdować nieuporządkowane. Trzeba więc otrzymany wynik podzielić przez liczbę uporządkowań dwóch nawiasów (czy też ogólniej przedmiotów). Oczywiście dwa przedmioty można ustawić w dwóch kolejnościach, więc tych par (nieuporządkowanych) jest $\frac{6\cdot5}{2}=15$.

Gdybyśmy w ten sam sposób przyjrzeli się liczbie $\binom{6}{3}$, to stwierdzilibyśmy, że jest ona równa liczbie wyborów trzech spośród sześciu danych przedmiotów. Pierwszy przedmiot można wybrać na 6 sposobów, drugi — na 5, a trzeci — na 4. Wobec tego liczba uporządkowanych wyborów trzech spośród sześciu przedmiotów równa jest $6\cdot5\cdot4$.[1] Aby znaleźć liczbę nieuporządkowanych wyborów trzech spośród sześciu elementów[2] należy otrzymany wynik podzielić przez liczbę wszystkich uporządkowań trzech elementów. Trzy elementy, np. liczby $1,2,3$, można uporządkować na $3\cdot2$ sposoby, bo każdy z trzech może znaleźć się na pierwszym miejscu i wtedy pozostałe dwa można wypisać na dwa sposoby: $1,2,3$; $1,3,2$; $2,1,3$; $2,3,1$; $3,1,2$; $3,2,1$. Stąd można wnioskować, że liczba wyborów trzech spośród sześciu przedmiotów jest równa $\frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3}=20$.

69. Wykazać, że $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

70. Wykazać, że $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.

71. Wykazać, że $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ dla dowolnych $a,b,c\in\mathbb{R}$.

72. Wykazać, że $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$ dla dowolnych $a,b,c\in\mathbb{R}$.

73. Wykazać, że $(a+b+c)^n=\sum\frac{n!}{k!\ell!m!}a^kb^\ell c^m$ przy czym sumowanie rozciąga się na takie wszystkie trójki $k.\ell,m$ nieujemnych liczb całkowitych, że $k+\ell+m=n$.

74! Udowodnić, że $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$.

75. Udowodnić, że $\sum\frac{n!}{k!\ell!m!}=3^n$ przy czym sumowanie rozciąga się na takie wszystkie trójki nieujemnych liczb całkowitych, że $k+\ell+m=n$.

W kilku następnych zadaniach występują sumy zakończone znakiem ... . Należy zakładać, że składniki wypisywane są dopóty, dopóki ma to sens, np. pisząc $\binom{n}{k}$ zakładamy, że $0\le k\le n$ i oczywiście, że liczby k,n są całkowite, np. symbol $\binom{5}{7}$ nie ma sensu w szkole, tym bardziej nie ma sensu symbol $\binom{1/3}{4}$.[3]

76! Udowodnić, że $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdots=0$.

77. Udowodnić, że $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\binom{n}{12}+\binom{n}{15}+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$.

78. Udowodnić, że
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\binom{n}{10}+\binom{n}{13}+\binom{n}{16}+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n-\cos\frac{n\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

79. Udowodnić, że
$$\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\binom{n}{11}+\binom{n}{14}+\binom{n}{17}+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n-\cos\frac{n\pi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

80. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą równości:

$\cos(n\alpha)=\cos^n\alpha-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\binom{n}{6}\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha+\cdots;$

$\sin(n\alpha)=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha-\binom{n}{7}\cos^{n-7}\alpha\sin^7\alpha+\cdots$

Rozwiązania następnych trzech zadań można ujrzeć przyglądając się trójkątowi Pascala, można też rozwiązać je nieco inaczej.

[1] czyli trzyelementowych wariacji bez powtórzeń

[2] czyli trzyelementowych kombinacji zbioru sześcioelementowego

[3] A później zdefiniujemy go tak: $\binom{1/3}{4}=\frac{1/3(-2/3)(-5/3)(-8/3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=-\frac{10}{243}$, $\binom{5}{7}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot0\cdot(-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=0$, itd.

81. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$1+2+3+4+5+\dots+n=\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1}+\binom{5}{1}+\dots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}.$$

82. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$\tfrac{1}{2}\big(2\cdot1+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+\dots+n\cdot(n-1)\big)=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\dots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

83! Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$\tfrac{1}{6}\big(3\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2+5\cdot4\cdot3+6\cdot5\cdot4+\dots+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\big)=$$
$$=\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\dots+\binom{n}{3}=\binom{n+1}{4}.$$

84. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$\binom{n}{0}t^n+\binom{n}{1}t^{n-1}(1-t)+\binom{n}{2}t^{n-2}(1-t)^2+\binom{n}{3}t^{n-3}(1-t)^3+$$
$$+\binom{n}{4}t^{n-4}(1-t)^4+\binom{n}{5}t^{n-5}(1-t)^5+\binom{n}{n}\cdots(1-t)^n=1$$

85. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$n\cdot\binom{n}{0}t^n+(n-1)\cdot\binom{n}{1}t^{n-1}(1-t)+(n-2)\cdot\binom{n}{2}t^{n-2}(1-t)^2+(n-3)\cdot\binom{n}{3}t^{n-3}(1-t)^3+$$
$$+(n-4)\cdot\binom{n}{4}t^{n-4}(1-t)^4+(n-5)\cdot\binom{n}{5}t^{n-5}(1-t)^5+\dots+0\cdot\binom{n}{n}(1-t)^n=nt.$$

86. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$n^2\cdot\binom{n}{0}t^n+(n-1)^2\cdot\binom{n}{1}t^{n-1}(1-t)+(n-2)^2\cdot\binom{n}{2}t^{n-2}(1-t)^2+$$
$$+(n-3)^2\cdot\binom{n}{3}t^{n-3}(1-t)^3+(n-4)^2\cdot\binom{n}{4}t^{n-4}(1-t)^4+$$
$$+(n-5)^2\cdot\binom{n}{5}t^{n-5}(1-t)^5+\dots+0^2\cdot\binom{n}{n}(1-t)^n=n(n-1)t^2+nt.$$

Wielomiany

Definicja 4. (wielomianu)

Wielomianem w nazywamy taką funkcję określoną na $\mathbb{R}$ lub na pewnym przedziale, że istnieją takie liczby $a_0,a_1,\dots,a_n$, że dla każdej liczby x z dziedziny funkcji w zachodzi równość
$$w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n. \quad \blacksquare$$

Twierdzenie 5.

Niech $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n$ i $a_0,a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli
$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_{n-1}x_0^{n-1}+a_nx_0^n=0,\\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_{n-1}x_1^{n-1}+a_nx_1^n=0,\\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\dots+a_{n-1}x_2^{n-1}+a_nx_2^n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_0+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-1}^2+\dots+a_{n-1}x_{n-1}^{n-1}+a_nx_{n-1}^n=0,\\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_{n-1}x_n^{n-1}+a_nx_n^n=0.\end{cases},$$
to $a_0=a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=a_n=0$.

Dowód. Dla $n=1$ twierdzenie wygląda tak: jeśli $x_0<x_1$ i $a_0+a_1x_0=0$ oraz $a_0+a_1x_1=0$, to $a_0=a_1=0$. Jest tak, bo po odjęciu danych równości otrzymujemy $a_1(x_1-x_0)=0$, z czego wynika, że $a_1=0$ (można podzielić przez x_1-x_0, bo $x_1\neq x_0$). Mamy więc $0=a_0+a_1x_0=a_0+0\cdot x_1=a_0$. Udowodniliśmy więc twierdzenie dla $n=1$.

Załóżmy teraz, że $x_0<x_1<x_2$ i że a_0,a_1,a_2 są takimi liczbami rzeczywistymi, że
$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=0,\qquad a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=0,\qquad a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=0.$$

Odejmujemy pierwszą równość stronami od dwu następnych i otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_1(x_1-x_0)+a_2(x_1^2-x_0^2)=0, \\ a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2^2-x_0^2)=0. \end{cases}$$

Dzieląc te równania przez $x_1-x_0\neq 0$ i $x_2-x_0\neq 0$ otrzymujemy

$$\begin{cases} a_1+a_2(x_1+x_0)=0, \\ a_1+a_2(x_2+x_0)=0. \end{cases}$$

Przepiszmy to w postaci $\begin{cases} (a_1+a_2x_0)+a_2x_1=0, \\ (a_1+a_2x_0)+a_2x_2=0. \end{cases}$ Z prawdziwości twierdzenia dla $n=1$ wynika, że $a_1+a_2x_0=0$ i $a_2=0$ (zastąpiliśmy a_0 przez $a_1+a_2x_0$, a_1 przez a_2, x_0 przez x_1, x_1 przez x_2). Wiemy więc, że $a_2=0$ i $a_1+a_2x_0=0$, więc $a_1=0$, zatem $0=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=a_0+0\cdot x_0+0\cdot x_0^2=a_0$. Udowodniliśmy, że $0=a_0=a_1=a_2$, czyli twierdzenie dla $n=2$.

Niech $x_0<x_1<x_2<x_3$ i $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ będą takimi liczbami, że

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3=0, \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3=0, \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+a_3x_2^3=0, \\ a_0+a_1x_3+a_2x_3^2+a_3x_3^3=0. \end{cases}$$

Odejmujemy pierwszą równość stronami od trzech następnych i otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_1(x_1-x_0)+a_2(x_1^2-x_0^2)+a_3(x_1^3-x_0^3)=0, \\ a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2^2-x_0^2)+a_3(x_2^3-x_0^3)=0, \\ a_1(x_3-x_0)+a_2(x_3^2-x_0^2)+a_3(x_3^3-x_0^3)=0. \end{cases}$$

Dzielimy kolejne równania przez $x_1-x_0\neq 0$, $x_2-x_0\neq 0$, $x_3-x_0\neq 0$ i otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_1+a_2(x_1+x_0)+a_3(x_1^2+x_1x_0+x_0^2)=0, \\ a_1+a_2(x_2+x_0)+a_3(x_2^2+x_2x_0+x_0^2)=0, \\ a_1+a_2(x_3+x_0)+a_3(x_3^2+x_3x_0+x_0^2)=0. \end{cases}$$

Przepisujeny te równości w postaci

$$\begin{cases} (a_1+a_2x_0+a_3x_0^2)+(a_2+a_3x_0)x_1+a_3x_1^2=0, \\ (a_1+a_2x_0+a_3x_0^2)+(a_2+a_3x_0)x_2+a_3x_2^2=0, \\ (a_1+a_2x_0+a_3x_0^2)+(a_2+a_3x_0)x_3+a_3x_3^2=0. \end{cases}$$

Stosując udowodnione już twierdzenie dla $n=2$ otrzymujemy:

$$0=a_1+a_2x_0+a_3x_0^2=a_2+a_3x_0=a_3\,,$$

Stąd wynika natychmiast, że $a_3=a_2=a_1=0$. Wobec tego $0=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3=a_0$, czyli $a_0=0$. Wykazaliśmy więc, że teza twierdzenia jest prawdziwa dla $n=3$ oraz dowolnych liczb a_0,a_1,a_2,a_3 i $x_0<x_1<x_2<x_3$. To rozumowanie można kontynuować. ■

Z tego twierdzenia wynika łatwo następujące

Twierdzenie 6. (o jednoznaczności współczynników wielomianu)
Jeśli równość $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_mx^m=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n$ zachodzi dla nieskończenie wielu liczb x, to $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, ... (przyjmujemy tu, że $0=a_{m+1}=a_{m+2}=\dots$, $0=b_{n+1}=b_{n+2}=\dots$).
Dowód. Przenosimy wszystko na jedną stronę równości i z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy $a_0-b_0=0$, $a_1-b_1=0$, ... ■

Teraz możemy przypomnieć definicję stopnia wielomianu.

Definicja 7. (stopnia wielomianu)

Jeśli $n \geq 0$ i $w(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ i $a_n \neq 0$, to mówimy, że w jest wielomianem stopnia n. Stopnia wielomianu zerowego (wszystkie współczynniki są zerami) nie definiujemy, ale przyjmujemy, że ten niezdefiniowany stopień jest mniejszy od każdej liczby całkowitej nieujemnej. Stopień wielomianu w oznaczamy symbolem $\mathrm{st}(w)$ (albo $\deg(w)$). ■

Definicja 8. (pierwiastka wielomianu)
Liczba x_0 nazywana jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy $w(x_0) = 0$. ■

Twierdzenie 9. (o dzieleniu z resztą)
Dla dowolnych wielomianów w, v, $v \neq 0$ istnieje dokładnie jedna para wielomianów q, r takich, że dla każdego x zachodzi równość $w(x) = q(x)v(x) + r(x)$ i $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(v)$.*

Dowód. Zaczniemy od dowodu istnienia wielomianów q, r. Jeśli $\mathrm{st}(w) < \mathrm{st}(v)$, to przyjmujemy $q = 0$ i $r = w$, równość $w = qv + r$ jest oczywiście spełniona i $\mathrm{st}(r) = \mathrm{st}(w) < \mathrm{st}(v)$.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów w stopnia mniejszego od n i że $\mathrm{st}(w) = n \geq k = \mathrm{st}(v)$. Niech $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ i niech $v(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$, $b_k \neq 0$. Niech $w_1(x) = w(x) - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}v(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}[b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k] = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} - \frac{a_n}{b_k}x^{n-k}[b_0 + b_1x + \cdots + b_{k-1}x^{k-1}]$. Jasne jest, że $\mathrm{st}(w_1) \leq n-1$. Istnieją więc wielomiany q_1 i r takie, że $w_1(x) = q_1(x)v(x) + r(x)$, przy czym $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(v)$. Przyjmujemy $q(x) = \frac{a_n}{b_k}x^{n-k} + q_1(x)$. Bez trudu stwierdzamy, że $w(x) = q(x)v(x) + r(x)$, co kończy dowód istnienia wielomianów q i r.

Należy jeszcze wykazać jednoznaczność. Załóżmy, że $q(x)v(x) + r(x) = \tilde{q}(x)v(x) + \tilde{r}(x)$. Wtedy $r(x) - \tilde{r}(x) = \tilde{q}(x)v(x) - q(x)v(x) = v(x)[\tilde{q}(x) - q(x)]$. Widzimy więc, że $\mathrm{st}(r - \tilde{r}) = \mathrm{st}(v) + \mathrm{st}(\tilde{q} - q)$, co jest niemożliwe, gdy $\mathrm{st}(\tilde{q} - q) \geq 0$, bo wtedy prawa strona jest większa niż lewa. Wobec tego $\mathrm{st}(\tilde{q} - q) < 0$, więc musi być spełniona równość $\tilde{q} = q$. Wtedy zachodzi równość

$$r(x) - \tilde{r}(x) = \tilde{q}(x)v(x) - q(x)v(x) = v(x)[\tilde{q}(x) - q(x)] = v(x) \cdot 0 = 0,$$

czyli $r(x) = \tilde{r}(x)$, co kończy dowód jednoznaczności. ■

Twierdzenie 10. (Bézout)
Reszta z dzielenia wielomianu w, przez wielomian $x - c$ jest równa $w(c)$.

Dowód. Reszta z dzielenia jakiegokolwiek wielomianu przez wielomian $x-c$ jest wielomianem stopnia mniejszego niż 1, więc albo jest wielomianem zerowym, albo wielomianem stopnia 0. W obu przypadkach jest to liczba (raczej funkcja stała). Niech r oznacza resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian $x - c$. Mamy $w(x) = q(x)(x - c) + r$, w szczególności $w(c) = q(c)(c - c) + r = r$, co kończy dowód. ■

Następne twierdzenie pozwala niejako zgadywać, jakie liczby wymierne są pierwiastkami wielomianów, które mają całkowite współczynniki. Ma ono spore znaczenie praktyczne.

Twierdzenie 11. (o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych)
Jeśli liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, $n \geq 1$, p, q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi (nie mają wspólnego dzielnika większego od 1), pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ jest liczba $\frac{p}{q}$, to liczba p jest dzielnikiem liczby a_0 (wyrazu wolnego wielomianu w) a liczba q jest

* Wielomian q nazywany jest ilorazem, a wielomian r — resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian v.

dzielnikiem liczby a_n (współczynnika kierującego wielomianu w).

Dowód. Ponieważ $0 = w\big(\frac{p}{q}\big) = a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\big(\frac{p}{q}\big)^2 + \cdots + a_n\big(\frac{p}{q}\big)^n$, więc

$$0 = 0\cdot q^n = \Big[a_0 + a_1\tfrac{p}{q} + a_2\big(\tfrac{p}{q}\big)^2 + \cdots + a_n\big(\tfrac{p}{q}\big)^n\Big]\cdot q^n =$$
$$= a_0q^n + a_1q^{n-1}p + a_2q^{n-2}p^2 + \cdots + a_{n-2}q^2p^{n-2} + a_{n-1}qp^{n-1} + a_np^n .$$

Liczba $a_0q^n + a_1q^{n-1}p + a_2q^{n-2}p^2 + \cdots + a_{n-2}q^2p^{n-2} + a_{n-1}qp^{n-1} = -a_np^n$ jest podzielna przez q. Liczby p,q nie mają wspólnego dzielnika większego niż 1, więc również liczby p i q^n są względnie pierwsze, zatem liczba q jest dzielnikiem liczby a_n.

Liczba $a_1q^{n-1}p + a_2q^{n-2}p^2 + \cdots + a_{n-2}q^2p^{n-2} + a_{n-1}qp^{n-1} + a_np^n = -a_0q^n$ jest podzielna przez p. Ponieważ liczby p,q nie mają wspólnego dzielnika większego niż 1, więc liczba p jest dzielnikiem liczby a_0. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 12.

Jeżeli liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ są całkowite, $n \geq 1$, a liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = =a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$, czyli $w(p) = 0$, to jest ona dzielnikiem liczby a_0 (wyrazu wolnego wielomianu w).

Następne twierdzenie, udowodnione przez C.F.Gaussa mówi, że rozkładając wielomian o współczynnikach całkowitych na iloczyn wielomianów o współczynnikach wymiernych w zasadzie otrzymujemy rozkład na iloczyn wielomianów o współczynnikach całkowitych. Czytelnik zauważy, że twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu, którego współczynniki są całkowite jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o rozkładzie wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie 13. (o rozkładzie wielomianu o współczynnikach całkowitych)

Jeśli liczby $a_0, a_1, \dots, a_n$ są całkowite, $k, l \geq 1$, liczby $b_0, b_1, \dots, b_k, c_0, c_1, \dots, c_l$ są wymierne i

$$W(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n = \big[b_0 + b_1x + \cdots b_kx^k\big]\cdot\big[c_0 + c_1x + \cdots c_lx^l\big] = u(x)\cdot v(x)$$

dla każdej liczby x, to istnieje taka liczba wymierna α, że wszystkie liczby

$$\alpha b_0, \alpha b_1, \dots, \alpha b_k, \tfrac{1}{\alpha}c_0, \tfrac{1}{\alpha}c_1, \dots, \tfrac{1}{\alpha}c_l$$

są całkowite.*

Dowód. W dowodzie — dla uproszczenia zapisu — przyjmiemy, że $0 = b_{k+1} = b_{k+2} = b_{k+3} = \dots$ oraz $0 = c_{l+1} = c_{l+2} = c_{l+3} =$. Każda liczba całkowita jest dzielnikiem liczby 0, bowiem $0 = p\cdot 0$.

Niech $b_0 = \frac{\beta_0}{m}$, $b_1 = \frac{\beta_1}{m}$, $b_2 = \frac{\beta_2}{m}$, $\dots$, $b_k = \frac{\beta_k}{m}$ przy czym liczby β_0, β_1, β_2, $\dots$, β_k są całkowite, ich największym wspólnym dzielnikiem jest 1, $m \in \mathbb{N}$. Liczby γ_0, γ_1, γ_2, $\dots$, γ_l są również całkowite, ich największym wspólnym dzielnikiem jest 1, $M \in \mathbb{N}$ i $c_0 = \frac{\gamma_0}{M}$, $c_1 = \frac{\gamma_1}{M}$, $c_2 = \frac{\gamma_2}{M}$, $\dots$, $c_l = \frac{\gamma_l}{M}$.

Załóżmy, że liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby m. Nie jest ona dzielnikiem wszystkich liczb β_0, β_1, β_2, $\dots$, β_k. Istnieje więc taki numer i, że p jest dzielnikiem liczb $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}$, ale nie jest

* Tego twierdzenia ani tym bardziej jego dowodu nie ma w programie szkolnym. Umieszczam je tutaj, bo uważam, że warto o nim usłyszeć w szkole, by zdać sobie sprawę z tego, że nie ma istotnej różnicy między rozkładaniem wielomianu na iloczyn wielomianów o współczynnikach wymiernych i rozkładaniem na iloczyn wielomianów o współczynnikach całkowitych. Do tego wystarczyłoby sformułowanie twierdzenia. Podałem też dowód, bo to przykład nieskomplikowanego rozumowania indukcyjnego, ale jednak nie całkiem trywialnego – dowodzimy kolejno (indukcja!), że liczby $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ są podzielne przez p.

dzielnikiem β_i, nie wykluczamy tego, że $i = 0$ (czyli β_0 nie dzieli się przez p). Zachodzą równości:

$$\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} = a_0,$$

$$\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{M} + \frac{\beta_1}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} = a_1,$$

$$\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_2}{M} + \frac{\beta_1}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{M} + \frac{\beta_2}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} = a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_i}{M} + \frac{\beta_1}{m}\cdot\frac{\gamma_{i-1}}{M} + \cdots + \frac{\beta_{i-1}}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{M} + \frac{\beta_i}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} = a_i$$

$$\frac{\beta_0}{m}\cdot\frac{\gamma_{i+1}}{M} + \frac{\beta_1}{m}\cdot\frac{\gamma_i}{M} + \cdots + \frac{\beta_{i-1}}{m}\cdot\frac{\gamma_2}{M} + \frac{\beta_i}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{M} + \frac{\beta_{i+1}}{m}\cdot\frac{\gamma_0}{M} = a_{i+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Liczba a_i jest całkowita, więc liczba $\frac{\beta_0\gamma_i+\beta_1\gamma_{i-1}+\cdots+\beta_{i-1}\gamma_1+\beta_i\gamma_0}{mM}$ też jest całkowita. Ponieważ liczba mM jest podzielna przez p, więc również liczba $\beta_0\gamma_i+\beta_1\gamma_{i-1}+\cdots+\beta_{i-1}\gamma_1+\beta_i\gamma_0$ jest podzielna przez liczbę pierwszą p. Ponieważ liczby $\beta_0\gamma_i$, $\beta_1\gamma_{i-1}$, ..., $\beta_{i-1}\gamma_1$ są podzielne przez p, zatem również liczba $\beta_i\gamma_0$ dzieli się przez p. Liczba β_i przez liczbę pierwszą p nie dzieli się, zatem γ_0 musi się dzielić przez p.

Spójrzmy na następną równość. Wynika z niej, że liczba $\beta_0\gamma_{i+1}+\beta_1\gamma_i+\cdots+\beta_{i-1}\gamma_2+\beta_i\gamma_1+\beta_{i+1}\gamma_0$ jest podzielna przez p. Wobec tego że składniki $\beta_0\gamma_{i+1}$, $\beta_1\gamma_i$, ..., $\beta_{i-1}\gamma_2$, $\beta_{i+1}\gamma_0$ są podzielne przez p, liczba $\beta_i\gamma_1$ też jest przez p podzielna, ale stąd wynika, że liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby γ_1.

W taki sam sposób wykazujemy, że następne liczby $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_l$ są podzielne przez p. Możemy więc pomnożyć wielomian $b_0+b_1x+\cdots b_kx^k = \frac{1}{m}\big(\beta_0+\beta_1x+\cdots\beta_kx^k\big)$ przez p dzieląc jednocześnie wielomian $c_0+c_1x+\cdots c_lx^l = \frac{1}{M}\big(\gamma_0+\gamma_1x+\cdots\gamma_lx^l\big)$ przez tę liczbę.

Powtarzając opisaną procedurę z jakimkolwiek czynnikiem pierwszym liczby całkowitej $\frac{m}{p}$ zmniejszamy powtórnie ten mianownik. W końcu doprowadzimy do usunięcia wszystkich czynników pierwszych liczby m, a to oznaczać będzie, że w mianowniku pojawi się liczba 1.

Następnie rozkładamy na czynniki pierwsze liczbę M i wykazujemy, że jej czynniki pierwsze są wspólnymi dzielnikami liczb β_0, β_1, ..., β_k, co pozwala na pomnożenie drugiego czynnika iloczynu przez M i jednoczesne podzielenie pierwszego czynnika przez M. Można więc przyjąć, że $\alpha = \frac{m}{M}$. ■

87! Udowodnić, że funkcja $\frac{1}{x^2+1}$ nie jest wielomianem.

88. Udowodnić, że funkcja $\frac{1}{x}$ nie jest wielomianem.

89! Udowodnić, że funkcja $\sqrt[3]{x}$ nie jest wielomianem.

90. Udowodnić, że funkcja $|x|$ nie jest wielomianem.

91. Udowodnić, że wielomian siódmego stopnia nie może mieć ośmiu różnych pierwiastków. (Można skorzystać z twierdzenia o jednoznaczności współczynników wielomianu.)

92. Załóżmy, że wielomian $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ ma dokładnie n pierwiastków $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Dowieść, że $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

93. Załóżmy, że wielomian $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ ma dokładnie n pierwiastków $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Udowodnić, że zachodzą następujące wzory Viète'a:
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}$,
$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n + x_{n-1}x_n = a_{n-2}$,
$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + \cdots + x_1x_3x_n + \cdots +$
$+ x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}$,
....
$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_{n-1}$.

94! Wykazać, że dla każdych trzech punktów (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), które nie leżą na jednej prostej i dla których $x_0 < x_1 < x_2$ istnieje dokładnie jedna trójka liczb a, b, c taka, że $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$, $y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$. Udowodnić, że wtedy $a \neq 0$.
Oznacza to, że jeśli trzy punkty nie leżą na jednej prostej, przy czym żadne dwa z nich nie leżą na jednej prostej pionowej, to wszystkie trzy leżą na wykresie pewnego wielomianu stopnia drugiego.

95. Wykazać, że dla każdych czterech punktów (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), które nie leżą na wykresie wielomianu stopnia mniejszego niż 3 i dla których $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ istnieje dokładnie jedna czwórka liczb a, b, c, d taka, że $y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$, $y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$, $y_2 = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$, $y_3 = ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d$. Udowodnić, że wtedy $a \neq 0$.
Oznacza to, że jeśli cztery punkty nie leżą na wykresie wielomianu stopnia ≤ 2, przy czym żadne dwa z nich nie leżą na jednej prostej pionowej, to wszystkie cztery leżą na wykresie pewnego wielomianu stopnia trzeciego.

96! Znaleźć wszystkie takie trójki liczb a, b, c, że liczby $1, 2$ są pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c$.

97. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb a, b, c, że liczby $-2, 2$ są pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c$.

98. Znaleźć wszystkie takie pary liczb b, c, że wśród pierwiastków wielomianu $2x^4 - 3x^3 + x^2 + bx + c$ są liczby 1 i 2.

99! Wykazać, że $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ dla każdego wykładnika $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

100! Wykazać, że $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

101. Rozłożyć na czynniki $(x + 13)^7 - x^7 - 13^7$.

102. Rozłożyć na czynniki $x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$.

103. Rozłożyć na czynniki $x^4(y^2 - z^2) + y^4(z^2 - x^2) + z^4(x^2 - y^2)$.

104. Rozłożyć na czynniki $x(y - z)^3 + y(z - x)^3 + z(x - y)^3$.

105. Czy liczba 123456789 dzieli: się przez 3, przez 5, przez 7, przez 11, przez 13, przez 17, przez 19?

106. Czy liczba 987654321 dzieli: się przez 3, przez 5, przez 7, przez 11, przez 13, przez 17, przez 19?

107. Czy wielomian $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ dzieli się: przez wielomian $x^5 - 1$, przez wielomian $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$?

108! Wyznaczyć liczby $p, q \in \mathbb{R}$ tak, by wielomian $x^4 + px^2 + q$ był podzielny przez:
(i) $x^2 + 5x + 6$, (ii) $x^2 + 5x + 7$, (iii) $x^2 + 6x + 9$.

109. Znaleźć największą wartość wielomianu $x(1 - x)$. Wykazać, że istnieje taki wielomian $w(x)$ o współczynnikach całkowitych, że jeśli $0 < x < 1$, to zachodzi nierówność $0 < |w(x)| < \frac{1}{2007}$.

110. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność
$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz \geq 0$$
i że staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z = 0$.

111. Rozwiązać równanie $(x^2 - 16x)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$.

112! Rozwiązać równanie $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.

113. Rozwiązać równanie $\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3} = x^2 + 2x + 4$.

114. Rozwiązać równanie $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = \frac{9}{16}$.

115. Rozwiązać równanie $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$.

116. Rozwiązać równanie $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = \frac{9}{2}$.

117. Rozwiązać równanie $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$.

118! Rozwiązać równanie $x^4 + (x - 1)^4 = 97$.

119. Rozwiązać równanie $(5 - x)^4 + (2 - x)^4 = 17$.

120. Rozwiązać równanie $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$.

121. Rozwiązać równanie $x^3 + 4 = 3x^2$.

122! Rozwiązać równanie $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

123. Rozwiązać równanie $\frac{2+x^3}{x^4-2x} = \frac{x^2}{3}$.

124. Rozwiązać równanie $x^6 - 9x^2 + 8 = 0$.

125. Rozwiązać równanie $2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 14x^2 + 11x + 5 = 0$.

126. Rozwiązać równanie $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$.

127. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $(ab + bc + ca)(a + b + c) - abc$.

128. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

129. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

130. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

131. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

132! Rozłożyć na czynniki wyrażenie $y^3(666 - x) - x^3(666 - y) + 666^3(x - y)$.

133*. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100})^2 - x^{100}$.

134. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^{10} + x^5 + 1$.

135*. Rozwiązać równanie $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$.

136*. Rozwiązać równanie $(x + 1)^4 = 2(1 + x^4)$.

137. Rozwiązać równanie $(3 - x)^4 + (2 - x)^4 = (5 - 2x)^4$.

138. Rozwiązać równanie $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$.

139. Rozwiązać równanie $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.

140. Rozwiązać równanie $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{17}{4}$.

141. Rozwiązać równanie $\frac{x+1}{x^3+x-1} + \frac{x^3+x-1}{x+1} = 2$.

142. Rozwiązać równanie $x^3 + 1 + (x^3 + 1)^{-1} = 2{,}5$.

143. Rozwiązać równanie $(x + 1)^6 + 20 = 9(x + 1)^3$.

144. Rozwiązać równanie $x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0$.

145. Rozwiązać równanie $x^6 = \frac{257x^2-68}{68x^2-257}$.

146. Rozwiązać równanie $(x - 2)^6 - 19(x - 2)^3 = 216$.

147. Rozwiązać równanie $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1(x - \frac{1}{x}) = 5$.

148. Rozwiązać równanie $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

149. Rozwiązać równanie $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

150. Rozwiązać równanie $2x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 14x^2 + 11x + 5 = 0$.

151. Rozwiązać równanie $x^5 + 25x^3 - 8x^2 - 200 = 0$.

152*. Rozłożyć na czynniki wyrażenie $x^4 + x^2 + \sqrt{2}x + 2$.

Potęgi i logarytmy

Przypomnijmy teraz, że jeśli $n \geq 2$ jest liczbą naturalną parzystą, $x \in \mathbb{R}$ jest liczbą nieujemną, to istnieje dokładnie jedna liczba nieujemna $y \in \mathbb{R}$ taka, że $y^n = x$. Nazywamy ją pierwiastkiem stopnia n z liczby x i oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{x}$. Jeśli $n \geq 1$ jest liczbą naturalną nieparzystą, to dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista y taka, że $x = y^n$. Nazywamy ją pierwiastkiem stopnia n z liczby x i oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{x}$. Jeśli stopień pierwiastka równy jest 2, to piszemy $\sqrt{x}$, zamiast $\sqrt[2]{x}$. Np. $\sqrt{196} = 14$, $\sqrt[5]{-32} = -2$ itd. Definiujemy potęgę o wykładniku wymiernym w następujący sposób $a^{k/l} = \sqrt[l]{a^k}$. Bez trudu sprawdzić można, że jeśli $a > 0$, to dla dowolnych liczb wymiernych u, v zachodzi równość $a^{u+v} = a^u a^v$. Przypomnijmy, że $a^0 = 1$ dla dowolnej liczby $a \neq 0$. Jeśli $a > 1$ i $u > v$, to $a^u > a^v$. Jeśli natomiast $0 < a < 1$ i $u > v$, to $a^u < a^v$.

Jeśli $a > 0$, to definiujemy potęgę o wykładniku rzeczywistym. Opiszemy drogę prowadzącą do odpowiedniej definicji. Dla ustalenia uwagi zakładać będziemy w dalszym ciągu, że $a > 1$. Zauważmy po pierwsze, że dla dowolnej liczby $b > 1$ zachodzi nierówność $\sqrt{b} < \frac{1+b}{2}$, bo $1+b-2\sqrt{b} = \left(1-\sqrt{b}\right)^2 > 0$. Stąd wynika, że $\sqrt[4]{b} < \frac{1+\sqrt{b}}{2} < \frac{1+\frac{1+b}{2}}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{b}{4}$. Analogicznie $\sqrt[8]{b} < \frac{1+\sqrt[4]{b}}{2} < \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{b}{4}}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{b}{8}$. Kontynuując dochodzimy do nierówności

$$\sqrt[2^n]{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{b}{2^n} = 1 + \frac{b-1}{2^n}.$$

Widzimy więc, że jeśli $u < x < v$ i $v - u < \frac{1}{2^n}$ dla pewnej liczby naturalnej $n > 1$, $u, v \in \mathbb{Q}$, to $0 < a^v - a^u = a^u\left(a^{v-u} - 1\right) < a^u\left(a^{1/2^n} - 1\right) = a^u\left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right) < a^u \cdot \frac{a-1}{2^n}$. Jeśli ustalimy liczbę $x \in \mathbb{R}$ i wybierzemy liczbę naturalną $k > x+1$, to otrzymamy nierówność $0 < a^v - a^u < a^u \cdot \frac{a-1}{2^n} < a^k \cdot \frac{a-1}{2^n}$. Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna m, że $a^k \cdot \frac{a-1}{2^m} < \varepsilon$. Jeśli $n \geq m$, $u < x < v$ oraz $v - u < \frac{1}{2^n}$, to $0 < a^v - a^u < a^u \cdot \frac{a-1}{2^n} < a^k \cdot \frac{a-1}{2^n} \leq a^k \cdot \frac{a-1}{2^m} < \varepsilon$ (wykazaliśmy, że różnica potęg liczby a, których wykładniki są bardzo bliskie, jest bardzo mała). Przed zdefiniowaniem potęgi o wykładniku niewymiernym sformułujemy jedno twierdzenie, którego dowodu podawać nie będziemy.

Lemat 14. (o przedziałach zstępujących)
Jeśli $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots$, to istnieje liczba x taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n \leq x \leq b_n$.* ■

Dowodu nie możemy podać, bo jest on zbyt bliski podstawom teorii liczb rzeczywistych, których w ogóle nie omawiamy. Stwierdzić jednak wypada, że chodzi w tym lemacie wyraźnie o przedziały domknięte. Przykładowo $(0,1] \supset (0, \frac{1}{2}] \supset (0, \frac{1}{3}] \supset \ldots$, ale częścią wspólną wszystkich przedziałów $(0,1], (0, \frac{1}{2}], (0, \frac{1}{3}], \ldots$ jest zbiór pusty. Przedziały domknięte $[0,1], [0\frac{1}{2}]$, $[0, \frac{1}{3}], \ldots$ mają dokładnie jeden wspólny element: 0.

* Innymi słowy: istnieje punkt należących do wszystkich przedziałów.

Twierdzenie 15. (o istnieniu potęgi o wykładniku rzeczywistym)
Niech $a, x \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Istnieje wtedy dokładnie jedna liczba rzeczywista y taka, że jeśli $u < x < v$, $u, v \in \mathbb{Q}$, to $a^u < y < a^v$.

Dowód. Niech $u_1, u_2, \ldots,\ v_1, v_2, \ldots$ będą liczbami wymiernymi takimi, że
$$-\tfrac{1}{2^{n+1}} + x < u_n < u_{n+1} < x < v_{n+1} < v_n < \tfrac{1}{2^{n+1}} + x \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots .$$
Mamy zatem $a^{u_1} \le a^{u_n} < a^{u_{n+1}} < a^{v_{n+1}} < a^{v_n} \le a^{v_1}$. Wobec tego
$$[a^{u_1}, b^{v_1}] \supset [a^{u_2}, b^{v_2}] \supset [a^{u_3}, b^{v_3}] \supset \ldots$$
Znajdzie się więc liczba y, która jest elementem każdego przedziału $[a^{u_n}, b^{v_n}]$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ponieważ $0 < v_n - u_n < \frac{1}{2^n}$, więc $0 < a^{v_n} - a^{u_n} < a^{v_1} \cdot \frac{a-1}{2^n}$. Załóżmy, że dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi nierówność $a^{u_n} < y < z < a^{v_n}$, tzn. zakładamy, że liczby y, z są elementami wspólnymi wszystkich rozpatrywanych przedziałów, przy czym $y < z$. Wtedy dla każdej liczby $n = 1, 2, 3, \ldots$ mamy $0 < z - y < a^{v_1} \cdot \frac{a-1}{2^n}$, co nie jest możliwe, bo po odpowiednim wybraniu n otrzymujemy nierówność $z - y > a^{v_1} \cdot \frac{a-1}{2^n}$, przeciwną do poprzedniej. Dowód został zakończony. ■

Teraz możemy zdefiniować potęgę o dowolnym wykładniku i dowolnej dodatniej podstawie.

Definicja 16. (potęgi o wykładniku dowolnym)
Jeśli $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, to a^x jest jedyną liczbą taką, że dla każdej pary liczb wymiernych u, v takich, że $u < x < y$ zachodzi nierówność $a^u < a^x < a^y$. Jeśli $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R}$, to $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$. ■

Na potęgi o dowolnym wykładniku przenoszą się własności potęgowania, o których wspominaliśmy w kontekście wykładników wymiernych i dodatniej podstawy. Prócz tego dochodzą nowe.

Twierdzenie 17. (o własnościach funkcji wykładniczej)
Jeśli $a > 0$, to

0. dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $1^x = 1$;
1. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $a^{x+y} = a^x a^y$;
2. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$;
3. $a^0 = 1$, $a^1 = a$;
4. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$;
5. dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
6. dla dowolnych $b, x \in \mathbb{R}$, $b > 0$ zachodzi $(ab)^x = a^x b^x$;
7. jeśli $a > 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x < y$, to $a^x < a^y$ (funkcja wykładnicza o podstawie większej niż 1 jest ściśle rosnąca);
8. jeśli $0 < a < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x < y$, to $a^x > a^y$ (funkcja wykładnicza o podstawie dodatniej, mniejszej niż 1 jest ściśle malejąca);
9. dla każdej liczby rzeczywistej $y > 0$ i dla każdej liczby dodatniej $a \ne 1$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x taka, że $y = a^x$. ■

Dowód tego twierdzenia pomijamy, większa jego część powinna być znana ze szkoły. Niektóre własności funkcji wykładniczej wymienione w twierdzeniu są łatwe do uzasadnienia lub wynikają nieomal natychmiast z pozostałych umieszczonych na tej liście, dowody innych wymagają pewnej pracy.

Definicja 18. (logarytmu)
Logarytmem liczby $y>0$ przy podstawie $a>0$, $a\neq 1$ nazywamy taką liczbę $x\in\mathbb{R}$, że $y=a^x$. Piszemy $x=\log_a y$. ■

Z twierdzenia o własnościach funkcji wykładniczej, punkt 9 wynika, że ta definicja ma sens, tzn. każda liczba dodatnia ma logarytm przy dowolnej podstawie dodatniej, różnej od 1. Zachodzi więc równość $a^{\log_a x}=x$ przy założeniu: $0<a\neq 1,\ x>0$.

Przypomnijmy, że funkcja wykładnicza o podstawie a to funkcja przypisująca liczbie x liczbę a^x. Argumentem jest w tym przypadku wykładnik potęgi, a wartością potęga.

Funkcja logarytmiczna o podstawie a to funkcja odwrotna do funkcji wykładniczej o podstawie a, czyli funkcja, która liczbie y przypisuje wartość wykładnika x w taki sposób, że podstawa podniesiona do potęgi x daje liczbę logarytmowaną y. Zapiszemy to wzorem
$$y=a^{\log_a y}\ .$$

Funkcją potęgową o wykładniku α nazywamy funkcję, która liczbie $x>0$ przypisuje liczbę x^α.

Logarytmów liczb ujemnych nie definiujemy, bo nie są nam potrzebne i nie można ich dobrze zdefiniować w zbiorze liczb rzeczywistych. Sytuacja zmieniłaby się po rozszerzeniu naszego zapasu liczb (tzn. gdybyśmy zajmowali się również liczbami zespolonymi, do czego dojdzie w II semestrze).

Przykład 0.1 $\log_2 8=3$, bo $2^3=8$; $\log_{10}10000=4$, bo $10^4=10000$; $\log_{10}\frac{1}{10000}=-4$, bo $10^{-4}=\frac{1}{10000}$; $\log_{10}\sqrt{10}=\frac12$, bo $10^{1/2}=\sqrt{10}$; $\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1000}}=-\frac32$, bo $10^{-3/2}=\sqrt{10^{-3}}=\frac{1}{\sqrt{1000}}$. ■

Ponieważ funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do wykładniczej, więc własnościom funkcji wykładniczej odpowiadają własności funkcji logarytmicznej.

Twierdzenie 19. (o własnościach funkcji logarytmicznej)
Jeśli $1\neq a>0$, to

1. dla dowolnych $x,y>0$ zachodzi $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;
2. dla dowolnych $x,y>0$ zachodzi $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;
3. $\log_a 1=0$ i $\log_a a=1$;
4. dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$, $x>0$ zachodzi $\log_a\left(x^y\right)=y\log_a x$;
5. dla dowolnej liczby $x>0$ zachodzi $\log_a\frac1x=-\log_a x$;
6. jeśli $b,x>0$ i $1\neq b$, to $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$, czyli $\log_b a\cdot\log_a x=\log_b x$;
7. jeśli $a>1$, $x,y\in\mathbb{R}$ i $0<x<y$, to $\log_a x<\log_a y$ (funkcja logarytmiczna o podstawie większej niż 1 jest ściśle rosnąca);
8. jeśli $0<a<1$, $x,y\in\mathbb{R}$ i $0<x<y$, to $\log_a x>\log_a y$ (funkcja wykładnicza o podstawie dodatniej, mniejszej niż 1 jest ściśle malejąca);
9. dla każdej liczby rzeczywistej y i dla każdej liczby dodatniej $a\neq 1$ istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x taka, że $y=\log_a x$. ■

Własność szósta to twierdzenie znane niektórym studentom ze szkoły pod nazwą: *twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu.* Jest ono bezpośrednim wnioskiem z własności 4 funkcji wykładniczej. Wynika z niego, że znając logarytmy przy podstawie b można znaleźć logarytmy przy nowej podstawie a. Warto powiedzieć, że logarytmy zostały wynalezione przez astronomów, bo ludzie obserwujący niebo w nocy, przeprowadzali wiele obliczeń, a w przeciwieństwie do obecnie żyjących nie mieli do dyspozycji urządzeń elektronicznych. Mnożenie liczb pochodzących z obserwacji było trudne (na ogół nie były to małe liczby naturalne), więc usiłowano zastąpić mnożenie znacznie mniej pracochłonnym dodawaniem. Początkowo używano do tego tablic trygonometrycznych i wzorów typu $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, a później stworzono tablice logarytmów* i używano własności nr 1: znajdowano logarytmy mnożonych liczb x, y w tablicach, sumowano je i znajdowano w tablicach liczbę, której logarytmem była liczba $\log_a x + \log_a y$. Podobnie pierwiastkowano i podnoszono do potęgi $\big(\ln(x^y) = y\ln x\big)$. Tak było do początku lat osiemdziesiątych XX wieku, czyli do momentu, w którym komputery osobiste stały się powszechne. Dziś do ,,ręcznych" obliczeń logarytmy nie są używane, tym niemniej są, i zapewne będą, stosowane różne skale logarytmiczne.

W chemii używana jest wielkość pH, która jest równa minus logarytmowi (o podstawie 10) ze stężenia jonów wodorowych w roztworze, chemicy mówią *ujemny logarytm* ... mając na myśli liczbę przeciwną do logarytmu. W czystej wodzie stężenie jonów wodorowych wynosi około $0,0000001 = 10^{-7}$, zatem pH czystej wody jest równe 7. Chodzi o to, by operować mniejszymi liczbami, co w przypadku jednokrotnego użycia znaczenia nie ma, ale pH jest używane przez bardzo wielu ludzi wielokrotnie, więc prostota definicji ma duże znaczenie.

Innym przykładem jest np. skala Richtera trzęsień Ziemi: trzęsienie o jeden stopień silniejsze ma dziesięciokrotnie większą energię. Podobnie jest jest z natężeniem dźwięku, również w tym przypadku skala jest logarytmiczna. Podobnie skala jasności gwiazd.

Logarytmy są użyteczne, bo ich użycie ,,spłaszcza" skalę. Zilustrujemy to zjawisko na przykładzie $\log_{10} 0,0000001 = -7$, $\log_{10} 0,000001 = -6$, $\log_{10} 0,00001 = -5$, $\log_{10} 0,0001 = -4$, $\log_{10} 0,001 = -3$, $\log_{10} 0,01 = -2$, $\log_{10} 0,1 = -1$, $\log_{10} 1 = 1$, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} 1000 = 3$, $\log_{10} 10000 = 4$, $\log_{10} 100000 = 5$, $\log_{10} 1000000 = 6$, $\log_{10} 10000000 = 7$. Chodzi o to, że trudno jest oglądać te zera w dużych ilościach, a czasem mamy do czynienia z wielkościami, jak wspomniane wyżej, które zmieniają się w szerokim zakresie. Wtedy wygodniej jest je zlogarytmować, bo wtedy łatwiej można się porozumiewać mówiąc lub pisząc o nich, zwłaszcza wtedy, gdy zostaje to ustalone ,,raz na zawsze", jak w podanych przykładach.

W tym tekście symbol $\sqrt[x]{a}$ oznacza pierwiastek stopnia x z liczby a, przy czym oznacza to po prostu, że zachodzi równość $\sqrt[x]{a} = a^{1/x}$; x może być liczbą naturalną, ale również może być liczbą niewymierną, ujemną.

153! Znaleźć $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 8$, $\log 9$ wiedząc, że $\log 2 \approx 0{,}30103$, $\log 3 \approx 0{,}47712$ oraz $\log 7 \approx 0{,}84509$.

154! Uprościć $10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$.

155. Uprościć $15^{2\log_{15} 40}$.

156. Uprościć $7^{\log_{49} 5 - 1}$.

157! Uprościć $125^{\log_{25} 16}$.

158. Znaleźć $\log 15$ wiedząc, że $\log 2 \approx 0{,}30103$ i $\log 3 \approx 0{,}47712$.

159. Jaki warunek muszą spełniać liczby dodatnie a i b, by zachodziła równość $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{a}{b}$? Podać przykłady liczb a i b, dla których ta równość nie zachodzi.

* Tablice logarytmów stworzono w XVII wieku (J.Napier). Pierwszą podstawą była liczba $e \approx 2{,}7$, o której będzie mowa w pierwszym semestrze, a po około 10 latach przeliczono (J.Briggs) logarytmy naturalne (czyli o podstawie e) na logarytmy o podstawie 10, czyli dziesiętne.

160! Czy $\log_{10} 2 > 0{,}3$? Odpowiedź należy uzasadnić nie korzystając ani z tablic, ani z urządzeń elektronicznych.

161! Wykazać, że $\log_{10} 2 < \frac{1}{3}$ oraz $2\log_{10} 7 < 2 - \log_{10} 2$.

162. Rozwiązać równanie $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

163! Rozwiązać równanie $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

164! Rozwiązać równanie $5^x - 5^{3-x} = 20$.

165. Rozwiązać równanie $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

166. Rozwiązać równanie $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

167. Rozwiązać równanie $x^x = x$, $x > 0$.

168. Rozwiązać równanie $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$, $x > 0$.

169. Rozwiązać równanie $(\frac{2}{3})^x = \sqrt[4]{1{,}5}$.

170! Rozwiązać równanie $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$.

171. Rozwiązać równanie $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$.

172. Rozwiązać równanie $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

173. Rozwiązać równanie $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}$.

174. Rozwiązać równanie $\log(64 \sqrt[24]{2^{x^2-40x}}) = 0$.

175. Rozwiązać równanie $x^{\frac{\log x+7}{4}} = 10^{\log x+1}$.

176. Rozwiązać równanie $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

177. Rozwiązać równanie $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$.

178! Rozwiązać równanie $\log(x^3 + 8) - \log(x + 2) = 1$.

179. Rozwiązać równanie $2x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 5$.

180. Rozwiązać równanie $x^{\log_5 x} = 625$.

181. Rozwiązać równanie $x^{\log_x 9} = 4x^2$.

182. Rozwiązać równanie $x^{\log x} = \frac{100}{x}$.

183. Rozwiązać równanie $\log_{15}(\log_4(\log_3 x)) = 0$.

184. Rozwiązać równanie $\log(3x + 4) + \log(x - 8) = 2$.

185. Rozwiązać równanie $2\log_3 3 + 4\log_{25} 7 = \log_5 x$.

186. Wykazać, że jeśli $0 < b \neq 1$ i $a > 0$, to $\log_b a = \log_{b^n} \left(a^n\right)$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$.

187. Rozwiązać równanie $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 5^x = 0$.

188. Rozwiązać równanie $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$.

189. Rozwiązać równanie $3^{x^2-7{,}7x+16{,}5} = 27\sqrt{3}$.

190. Rozwiązać równanie $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{7x-3}$.

191. Rozwiązać równanie $15^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6}$.

192. Rozwiązać równanie $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

193. Rozwiązać równanie $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

194. Rozwiązać równanie $\left(\frac{57}{37}\right)^{1+x} + \left(\frac{57}{37}\right)^{1-x} = 10$.

195. Rozwiązać równanie $\left[2\left(2^{3+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$.

196. Rozwiązać równanie $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt[x]{\frac{4}{3}}=\frac{9}{16}$.

197. Rozwiązać równanie $\log\frac{3x-5}{2x}+\log\frac{x+1}{2(2x-7)}=\log\frac{5}{x}$.

198! Rozwiązać równanie $\frac{1}{2}\log(x+3)=1-\frac{1}{2}\log(x+24)$.

199. Rozwiązać równanie $2(\log x-\log 6)=\log x-2\log(\sqrt{x}-1)$.

200. Rozwiązać równanie $\log 2-\log(y^2-4y+5)=1-2\log\sqrt{y^2+4y+5}$.

201. Rozwiązać równanie $\log\left(\sqrt[1/x]{2^{x+6/x-5}}+1\right)=\log 2$.

202. Rozwiązać równanie $\log 8+4\log 2=\log 3-\log 12+\log 2^{3x^2-20x+2}$.

203. Rozwiązać równanie $\log 10+\frac{1}{3}\log(271+3^{\sqrt{3x}})=2$.

204. Rozwiązać równanie $\log(5-x)+2\log\sqrt{3-x}=0$.

205. Rozwiązać równanie $2^{1/\log_2 x}=4$.

206. Rozwiązać równanie $4^{\log x}=\frac{1}{2}\cdot 10^{1-\log\frac{5}{2}}$.

207. Rozwiązać równanie $\log(3x-91)-\log(30-x)=1$.

208. Rozwiązać równanie $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$.

209. Rozwiązać równanie $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$.

210. Rozwiązać równanie $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$.

211. Rozwiązać równanie $\log(6\cdot 5^x+25\cdot 20^x)=x+\log 25$.

212. Rozwiązać równanie $\log\left(4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}}-1\right)-1=\log\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}}+2\right)-2\log 2$.

213. Rozwiązać równanie $\log\sqrt{75+5^{\sqrt[3]{x-1}}}=1$.

214. Rozwiązać równanie $\log\left(64^{-1}\sqrt[24]{2^{x^2-25}}\right)=0$.

215. Rozwiązać równanie $2^{\frac{3}{\log_8 x}}=\frac{1}{64}$.

216. Rozwiązać równanie $\log(3x^2+7)-\log(3x-2)=1$.

217. Rozwiązać równanie $10^{\log_{(1/\sqrt{3})}x^4}=0{,}0001$.

218. Rozwiązać równanie $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5}=50$.

219. Rozwiązać równanie $\log\sqrt[3]{2^{4x-1}}=1-\log\frac{125}{100}$.

220. Rozwiązać równanie $3^{2-\log_3 x}=81x$.

221. Rozwiązać równanie $1-\log a=\frac{1}{3}(\log\frac{1}{2}+\log x+\frac{1}{3}\log a)$, gdy $a>0$.

222. Rozwiązać równanie $100x^{\log x}=x^3$.

223. Rozwiązać równanie $x^{1+\log x}=100$.

224. Rozwiązać równanie $(\log_2 x)^2+3=2\log_2(x^2)$.

225. Rozwiązać równanie $x^{2(\log x)^3-\frac{3}{2}\log x}=\sqrt{10}$.

226. Rozwiązać równanie $x^{1/\log x}=10^{x^4}$.

227. Rozwiązać równanie $\log_2(9x^2-20)-2=\log_2 6+\log_2 x$.

228. Rozwiązać równanie $x=100^{\frac{1}{2}-\log\sqrt[4]{4}}$.

229. Rozwiązać równanie $\log_2(\log_2 x)=\log_2 3+\log_2 4$.

230. Rozwiązać równanie $\log(2x-51)-\log(22-x)=2$.

231. Rozwiązać równanie $2\log_5 3+4\log_{25}7=\log_5 x$.

232. Rozwiązać równanie $\log_{3x}3=(\log_3 3x)^2$.

233. Rozwiązać równanie $\log\sqrt{x+1}+3\log\sqrt{1-x}=\log\sqrt{1-x^2}+2$.

234. Rozwiązać równanie $\log(3x-4)^2+\log(2x-4)^2=2$.

235. Rozwiązać równanie $\log_a 3+\log_a(4^{x-2}+9)=1+\log_a(4^{x-2}+1)$, $0<a\neq 1$.

236! Dla jakich $m\in\mathbb{R}$ równanie $(1-m)9^x+4\cdot 3^x=m+2$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste?

237. Dane jest równanie $(2+m)\log_2^2(x+4)+2(1-m)\log_2(x+4)+m-2=0$. Dla jakich liczb $m\in\mathbb{R}$ pierwiastki tego równania są ujemne?

238. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=648; \\ 3^x\cdot 2^y=432. \end{cases}$

239. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^y=y^x; \\ x^3=y^2. \end{cases}$

240! Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1; \\ x^2-y^2=2. \end{cases}$

241. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \frac{\log x+\log y}{\log(x+y)}=1; \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

242. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} xy=40; \\ x^{\log y}=4. \end{cases}$

243. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^3+y^2=33; \\ 3\log x+2\log y=2+\log 2. \end{cases}$

244! Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 3^x-2^y=77; \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y}{2}}=7. \end{cases}$

245! Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2; \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2; \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2. \end{cases}$

246. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}; \\ (x+y)2^{y-x}=3. \end{cases}$

247. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 5(\log_y x+\log_x y)=26; \\ xy=64. \end{cases}$

248. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log x+\log y=2; \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

249. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 8^x=10y; \\ 2^x=5y. \end{cases}$

250. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x^{y+1}=27; \\ x^{2y-5}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

251. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log_{xy}(x-y)=1; \\ \log_{xy}(x+y)=0. \end{cases}$

252! Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log(x^2+y^2)-1=\log 13; \\ \log(x+y)-\log(x-y)=3\log 2. \end{cases}$

253. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log_y x-\log_x y=\frac{8}{3}; \\ xy=16. \end{cases}$

254. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 9\cdot 5^x+7\cdot 2^{x+y}=457; \\ 6\cdot 5^x-14\cdot 2^{x+y}=-890. \end{cases}$

255. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0; \\ x^2-5y^2+4=0. \end{cases}$

256. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}; \\ (x+y)2^{y-x}=3. \end{cases}$

257. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \frac{\log(x-y)-2\log 2}{1-\log(x+y)} = 1; \\ \frac{\log x-\log 3}{\log y-\log 7} = -1. \end{cases}$

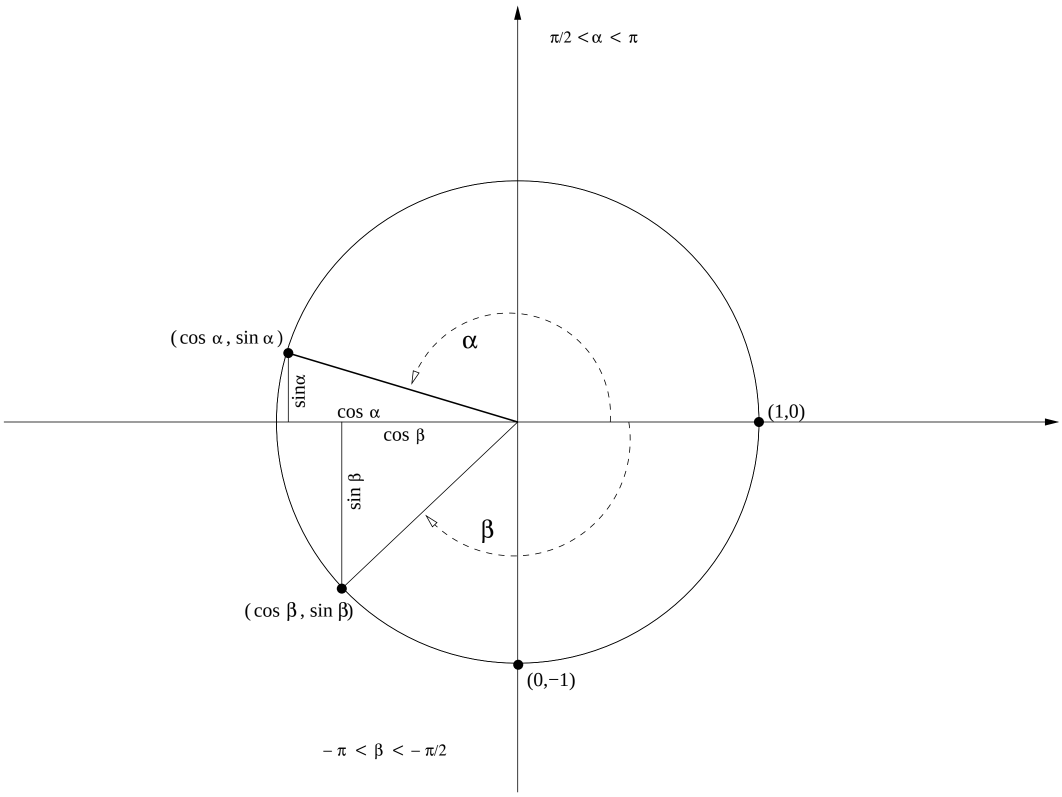
258. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200 \\ 25^{\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689 \end{cases}$

259! Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2; \\ x^2 + y = 12. \end{cases}$

260! Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \log x + \log y = 2; \\ x^2 + y^2 = 425. \end{cases}$

Sinusy i kosinusy

Podamy definicję sinusa i kosinusa dowolnego kąta. Umieszczamy kąt α na płaszczyźnie tak, by jego pierwsze ramię pokryło się z dodatnią półosią OX, czyli ze zbiorem $\{(x,y)\colon\ 0 \le x, y = 0\}$. Na drugim ramieniu leży pewien punkt $(x,y) \neq (0,0)$. Dodatnie kąty uzyskujemy przez obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a ujemne — w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Definujemy $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Wierzchołkiem kąta α jest punkt $(0,0)$, punkt $(1,0)$ leży na pierwszym ramieniu kąta, a punkt $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ leży na jego drugim ramieniu; oba te punkty leżą na okręgu o środku w punkcie $\mathbf{0} = (0,0)$ i promieniu równym 1. Kąty mierzymy w stopniach lub w radianach. Przyjmujemy, że miarą kąta dodatniego (w radianach) jest długość łuku okręgu jednostkowego zaczynającego się na pierwszym ramieniu kąta i kończącego się na drugim ramieniu. Kąt równy jest $\frac{\pi}{2}$ to kąt, na którego pierwszym ramieniu leży punkt $(1,0)$, na drugim — punkt $(0,1)$, bo łuk o długości $\frac{\pi}{2}$ to ćwierć okręgu, zatem odpowiada on kątowi prostemu.



Miarą kąta ujemnego jest liczba przeciwna do długości odpowiedniego łuku. Wyrażając kąt w radianach, zachowujemy nazwę jednostki w domyśle: pisząc, że kąt równy jest π myślimy, że jest on równy

π radianów. Z definicji i twierdzenia Piagorasa wynika, że $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$ dla każdego $\gamma \in \mathbb{R}$.

Na rysunku kąt α jest równy około 162° lub 2,83 radiana, kąt $\beta \approx -136^\circ 49'$, czyli $\beta \approx -2{,}39$.

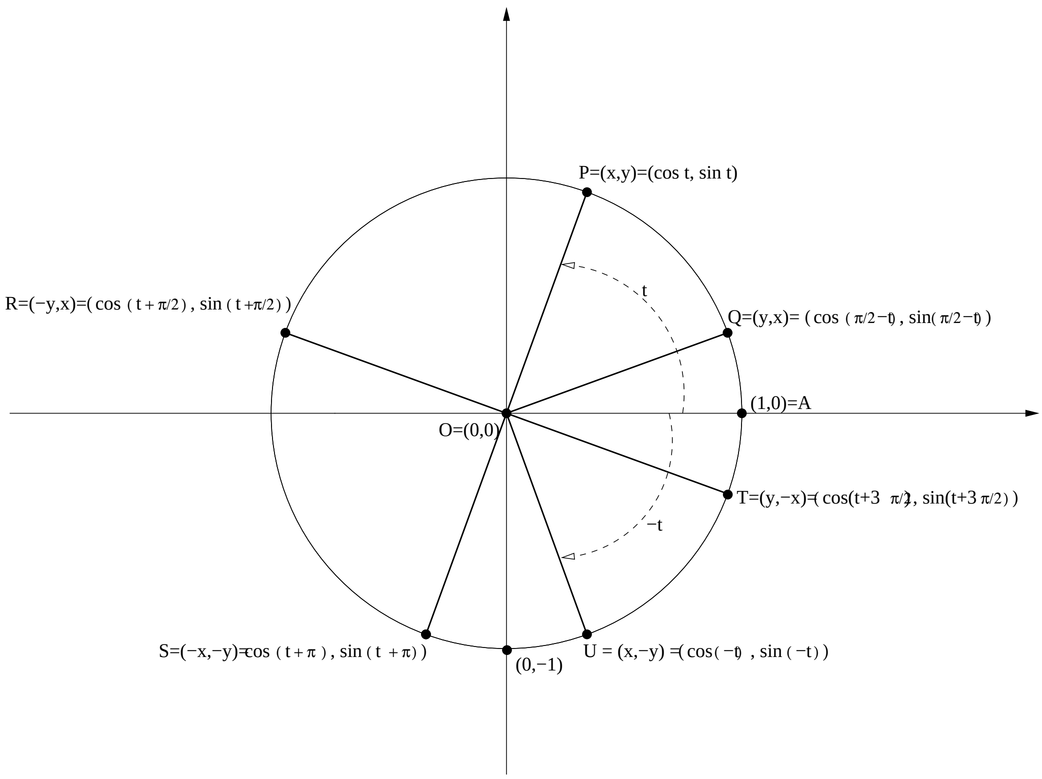
Z definicji wynikają od razu równości $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$. Rozważmy kąt 30°, czyli kąt równy $\frac{\pi}{6}$ (radiana). Ponieważ $0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, więc punkt $(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6})$ znajduje się w pierwsze ćwiartce układu współrzędnych. Punkty $\mathbf{0} = (0,0)$, $(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6})$ i $(0,1)$, są wierzchołkami trójkąta równobocznego, zatem rzut prostokątny wierzchołka $(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6})$ na bok o końcach $\mathbf{0}$, $(0,1)$ jest środkiem tego boku, czyli punktem $(0, \frac{1}{2})$. Stąd wynika, że $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, więc $\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. dowodzimy, że $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ i $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Trójkąt o wierzchołkach $\mathbf{0} = (0,0)$, $(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})$ i $(\cos\frac{\pi}{4}, 0)$ jest równoramienny, zatem $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$, więc z równości $\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1$ wynika, że $\cos^2\frac{\pi}{4} = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, czyli $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zajmiemy się teraz tzw. wzorami redukcyjnymi. Punkty (x,y) i $(x,-y)$ są symetryczne względem poziomej osi układu współrzędnych. Jasne jest, że jeśli t oznacza kąt, którego pierwszym ramieniem jest dodatnią półoś OX, a drugim półprosta zaczynająca się w punkcie $\mathbf{0} = (0,0)$, zawierająca punkt $(x,y) = (\cos t, \sin t)$, to $(x,-y) = \big(\cos(-t), \sin(-t)\big)$ — w drugim przypadku odmierzamy kąt w przeciwną stronę niż poprzednio. Wynika stąd, że $\cos(-t) = \cos t$ i $\sin(-t) = -\sin t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Zauważmy teraz, że obrazem punktu (x,y) w obrocie o kąt $\frac{\pi}{2}$ (dodatni, więc w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) wokół punktu $\mathbf{0}$ jest punkt $(-y,x)$. Wynika to np. z tego, że w trójkącie o wierzchołkach $\mathbf{0} = (0,0)$, $(x,y) \neq \mathbf{0}$, $(-y,x)$ kąt między bokami wychodzącymi z wierzchołka $\mathbf{0}$ jest prosty (stosujemy tw. Pitagorasa):

$$\big[(x-0)^2 + (y-0)^2\big] + \big[(-y-0)^2 + (x-0)^2\big] = 2x^2 + 2y^2 = \big[x - (-y)\big]^2 + \big[y - x\big]^2,$$

oraz z tego, że jeśli (x,y) znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ($x, y \geq 0$), to punkt $(-y,x)$ znajduje się w drugiej ćwiartce $-y \leq 0 \leq x$; jeśli (x,y) znajduje się w drugiej ćwiartce układu współrzędnych ($x \leq 0 \leq y$), to punkt $(-y,x)$ znajduje się w trzeciej ćwiartce ($-y, x \leq 0$) itd.



Ze stwierdzeń poprzedzających rysunek wynika, że

$$\text{jeśli } (x,y)=(\cos t,\sin t)\,,\text{ to } (-y,x)=\big(\cos(t+\tfrac{\pi}{2}),\sin(t+\tfrac{\pi}{2})\big)\,,$$

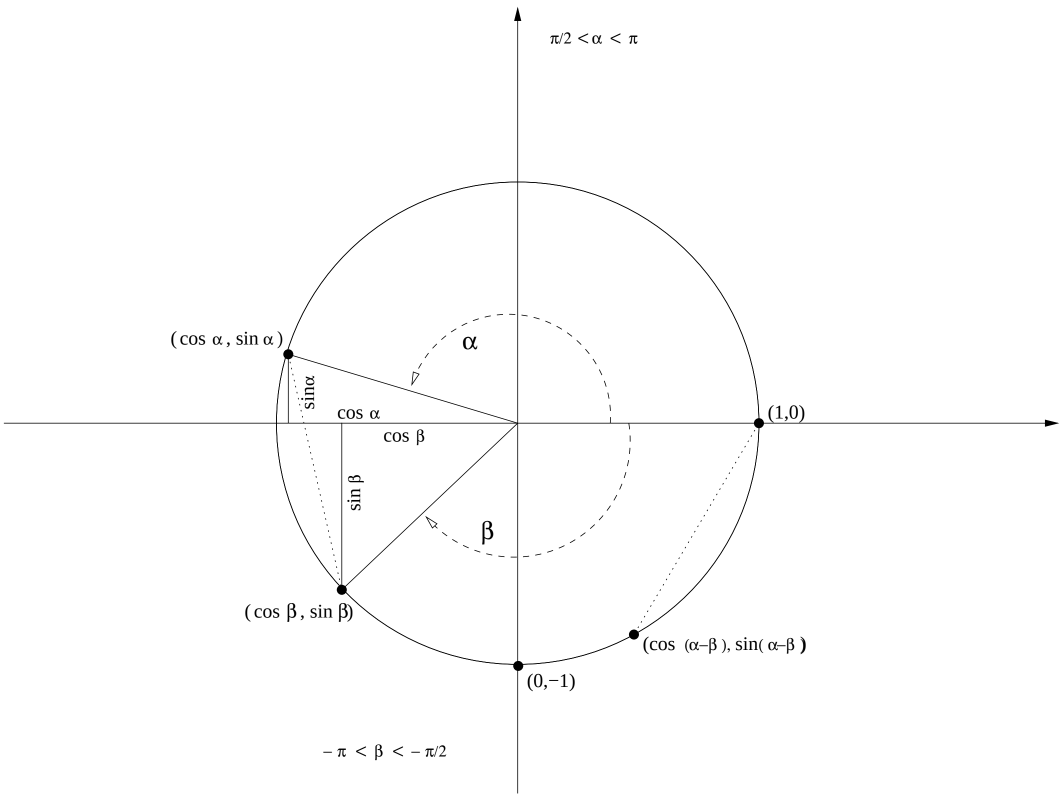
a stąd mamy wzory $\cos(t+\frac{\pi}{2})=-y=-\sin t$, $\sin(t+\frac{\pi}{2})=x=\cos t$.

Obróciwszy punkt (x,y) o kąt π wokół punktu $\mathbf{0}$ otrzymujemy punkt $(-x,-y)$. Z równości $(x,y)=\big(\cos t,\sin t\big)$ dla pewnej liczby t wynika wzór $(-x,-y)=\big(\cos(t+\pi),\sin(t+\pi)\big)$. Stąd zaś $\cos(t+\pi)=-\cos t$ i $\sin(t+\pi)=-\sin t$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$.

Analogicznie obrazem punktu (x,y) w obrocie wokół punktu $\mathbf{0}$ o kąt $\frac{3\pi}{2}$ jest punkt $(y,-x)$, a stąd wnioskujemy, że $\cos(t+\frac{3\pi}{2})=\sin t$ i $\sin(t+\frac{3\pi}{2})=-\cos t$.

Wreszcie wypada stwierdzić, że punkt $\big(\cos(\frac{\pi}{2}-t),\sin(\frac{\pi}{2}-t)\big)$ można otrzymać z punktu $(x,y)= =(\cos t,\sin t)$ stosując kolejno symetrię względem osi OX, w następstwie czego otrzymujemy punkt $\big(\cos(-t),\sin(-t)\big)=(x,-y)$, a potem obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu $\mathbf{0}$, w wyniku którego otrzymujemy punkt $\big(\cos(\frac{\pi}{2}-t),\sin(\frac{\pi}{2}-t)\big)=\big(-(-y),x\big)=(y,x)$. Wobec tego $\cos(\frac{\pi}{2}-t)=\sin t$ i $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$ dla każdej liczby $t\in\mathbb{R}$.

Dodajmy jeszcze do tej listy wzory $\cos(t+2\pi)=\cos t$ i $\sin(t+2\pi)=\sin t$, które wynikają od razu z tego, że obrót o kąt 2π nie rusza punktów. Wyprowadziliśmy, więc pewną liczbę wzorów redukcyjnych i mamy nadzieję, że czytelnicy tego tekstu, po przeanalizowaniu przedstawionego uzasadnienia, będą je w stanie samodzielnie ujrzeć na rysunku nawet po długim czasie!



Zajmiemy się jeszcze wzorami na kosinus i sinus sumy i różnicy kątów. Załóżmy, że dane są dwa kąty α i β niekoniecznie takie jak na rysunku. Po obrocie o kąt β punkt $\big(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)\big)$ trafia na punkt $(\cos\alpha,\sin\alpha)$, zaś punkt $(1,0)= =(\cos 0,\sin 0)$ trafia na punkt $(\cos\beta,\sin\beta)$. Wynika stąd, że cięciwa łącząca punkty $\big(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)\big)$ i $(1,0)=(\cos 0,\sin 0)$ ma taką samą długość, jak cięciwa łącząca punkty $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ i $(\cos\beta,\sin\beta)$. Zapiszemy to za pomocą wzoru:

$$\big[\cos(\alpha-\beta)-1\big]^2+\big[\sin(\alpha-\beta)-0\big]^2=\big[\cos\alpha-\cos\beta\big]^2+\big[\sin\alpha-\sin\beta\big]^2$$

czyli

$$\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)=$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\,,$$

więc (trzy razy „jedynka trygonometryczna”, potem redukcja)

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,.$$

Ponieważ otrzymany wzór jest prawdziwy dla wszystkich kątów α,β, więc możemy napisać

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\big(\alpha-(-\beta)\big)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\xlongequal[\text{redukcyjne}]{\text{wzory}}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,.$$

Dalej nieco szybciej:

$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos\beta+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ i wreszcie $\sin(\alpha-\beta)=\sin\big(\alpha+(-\beta)\big)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,.$

Otrzymaliśmy prawie wszystkie z najbardziej podstawowych wzorów trygonometrycznych. Wyprowadzimy jeszcze cztery:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\,,\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\,,$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\,,\qquad \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\tfrac{\beta-\alpha}{2}\,.$$

Niech $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Wtedy $x+y=\alpha$ i $x-y=\beta$. Wtedy

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=$$
$$=2\sin x\cos y=2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Zastępując we właśnie otrzymanym wzorze β przez $-\beta$ otrzymujemy natychmiast drugi wzór. Trzeci wyprowadzamy tak, jak pierwszy:

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y+\cos x\cos y+\sin x\sin y=$$
$$=2\cos x\cos y=2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

A czwarty uzyskamy z trzeciego:

$$\cos\alpha-\cos\beta=\cos\alpha+\cos(\pi+\beta)=2\cos\tfrac{\alpha+\pi-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\pi+\beta}{2}=$$
$$=2\cos\big(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\alpha-\beta}{2}\big)\cos\big(-\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\alpha+\beta}{2}\big)=2\big[-\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\big]\cdot\big[\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\big]=2\sin\tfrac{\beta-\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\,.$$

Z otrzymanych wzorów można wyprowadzić wiele innych, czego nie będziemy tu robić. Jednak zapiszemy jeszcze wzory na sinus i kosinus kąta podwojonego:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\quad\text{i}\quad\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\,.$$

261! Wyrazić w radianach: 20°, 45°, 105°, 150°, 210°, 270°, 315°, 330°, 450°, 570°, α°.

262! Wyrazić w stopniach: $\frac16$rad, $\frac13$rad, $\frac34$rad, $\frac1{12}$rad, $\frac7{12}$rad, $\frac89$rad, $\frac5{18}$rad, α rad.

263. Wyrazić 1 radian w: a) stopniach z dokładnością do $0{,}001^\circ$,
b) w stopniach i minutach z dokładnością do $1'$.

264. Wyrazić w radianach: a) 1° z dokładnością do 0,001 rad, b) $1'$ z dokładnością do 0,0001 rad.

265. Wyznaczyć długości boków i kąty w trójkącie prostokątnym ABC (kąt C jest prosty) mając dane:

a) $a=3$ cm, $b=7$ cm;
b) $a=6,3$ cm, $b=12$ cm;
c) $a=4$ cm, $c=8$ cm;
d) $b=12$ cm, $c=0{,}25$ m;
e) $b=7$ m, $c=21$ m;
f) $a=8$ cm, $\alpha=32^\circ10'$;
g) $a=17$ cm, $\beta=43^\circ$;
h) $b=0,24$ m, $\alpha=69^\circ$;
i) $c=18$ cm, $\alpha=37^\circ24'$;
j) $c=62$ cm, $\beta=62^\circ31'$.

266. Wyznaczyć, bez użycia tablic matematycznych i sprzętu elektronicznego, długości boków i kąty w trójkącie prostokątnym ABC (kąt C jest prosty) mając dane:

a) $a = 30$ cm, $\alpha = 30^\circ$; b) $a = 10$ cm, $\beta = 30^\circ$; c) $a = 6$ cm, $c = 12$ cm;
d) $c = 28$ cm, $\alpha = 30^\circ$; e) $c = 16$ cm, $\beta = 60^\circ$; f) $c = 2$ cm, $b = \sqrt{3}$ cm;

267! W trójkącie ABC dane są $\angle C = 120^\circ$, $|AC| = 7$ cm i $|BC| = 4$ cm. Znaleźć bok AB.

268. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |CB|$) dane są (α — kąt przy wierzchołku A, β — przy wierzchołku B, a γ — przy wierzchołku C):

a) $|AC| = 10,\ \gamma = 40^\circ$; b) $|CB| = 20,\ \alpha = 50^\circ$; c) $|AC| = 15,\ \gamma = 100^\circ$;
d) $|AB| = 20,\ \gamma = 120^\circ$; e) $|AB| = 40,\ |AC| = 25$; f) $|AB| = 25,\ \gamma = 25^\circ$;
g) $|AB| = 5a,\ |AC| = 4a$; h) $|CB| = a,\ \gamma = 150^\circ$, i) $AB = 100,\ \gamma = 120^\circ$.

Znaleźć pozostałe boki i kąty.

269! Dla jakich α $(0^\circ < \alpha < 360^\circ)$ prawdziwe są następujące nierówności:

a) $\sin\alpha\cos\alpha > 0$, b) $\sin\alpha\cos\alpha < 0$, c) $\sin\alpha\cos\alpha = 0$,
d) $\operatorname{tg}\alpha > 1$, e) $\operatorname{ctg}\alpha < \sqrt{3}$, f) $\sin\alpha > \cos\alpha$,
g) $\cos\alpha < \frac{1}{2}$, h) $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{ctg}\alpha$, i) $\sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$?

270! Określić (bez użycia tablic) znak różnicy:

a) $\sin 72^\circ - \sin 80^\circ$, b) $\cos 15^\circ - \cos 16^\circ$, c) $\cos 300^\circ - \cos 340^\circ$,
d) $\operatorname{tg} 35^\circ - \sin 35^\circ$, e) $\sin 200^\circ - \sin 100^\circ$, f) $\cos 200^\circ - \cos 20^\circ$,
g) $\sin 100^\circ - \sin 10^\circ$, h) $\sin 400^\circ - \sin 40^\circ$, i) $\operatorname{tg} 46^\circ - \sin 2004^\circ$.

271. Jaką liczbą (dodatnią, czy ujemną) jest:

a) $\sin 1$, b) $\sin 2$, c) $\sin 10$, d) $\cos 2$,
e) $\cos 15$, f) $\cos(-8)$, g) $\operatorname{tg} 1{,}5$, h) $\operatorname{tg}(-0,75)$,
i) $\operatorname{tg} 10$, j) $\operatorname{ctg} 5$, k) $\operatorname{ctg} 1{,}5$, l) $\operatorname{ctg} 2{,}5$?

272. Która z liczb w każdej z podanych par jest większa:

a) $\sin 1,\ \operatorname{tg} 1$, b) $\cos 1,\ \operatorname{ctg} 1$, c) $\sin 2,\ \cos 2$, d) $\sin\frac{\pi}{4},\ \sin\frac{\pi}{3}$,
e) $\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi,\ \operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$, f) $\sin 5\pi,\ \cos 3\pi$ g) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12},\ \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$ h) $\sin 6,\ \cos 6$.

273. Jaką liczbą (dodatnią czy ujemną) jest:

a) $\sin(\cos 1)$, b) $\cos(\sin 1)$, c) $\operatorname{ctg}(\cos 0{,}3)$,
d) $\operatorname{tg}(\sin 2{,}5)$, e) $\operatorname{tg}(\cos\frac{3}{4}\pi)$, f) $\cos(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi)$?

274. Skonstruować kąt ostry α wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
d) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, e) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, f) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
g) $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, h) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, i) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

275. Skonstruować kąt α wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, b) $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos\alpha < 0$, d) $\sin\alpha = -1$.

276! Skonstruować kąt β wiedząc, że:

a) $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ i $90^\circ < \beta < 180^\circ$, b) $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $270^\circ < \beta < 360^\circ$,
c) $\cos\beta = \frac{2}{3}$ i $\sin\beta > 0$, d) $\cos\beta = -\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\beta < 0$,
e) $\cos\beta = -\frac{2}{5}$ i $\operatorname{tg}\beta > 0$ f) $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{7},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

277! Obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli:

a) $\sin\alpha = \frac{15}{17}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,
b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$,
c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$,
d) $\sin\alpha = -\sqrt{0{,}2}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$,
e) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
f) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$ i $\sin\alpha > 0 > \cos\alpha$.

278! Sprawdzić następujące tożsamości:

a) $(\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x)\cdot\operatorname{ctg}^2 x = \sin^2 x$,
b) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$,
c) $(1+\cos x)(1-\cos x) = \sin^2 x$,
d) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$,
e) $\frac{1}{\cos x} - \cos x = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$,
f) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Dla jakich x równości te nie zachodzą?

279. Sprawdzić następujące tożsamości:

a) $1 + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$,
b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$,
c) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$,
d) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{ctg} x + 1)$,
e) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{\sin x}$,
f) $(1+\sin x)(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x) = \cos x$.

280. Sprawdzić następujące tożsamości:

a) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$,
b) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$,
c) $(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x})(\sin x + \cos x) = 2 + \frac{1}{\sin x \cos x}$,
d) $(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x})(\sin x + \cos x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$,
e) $1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

281. Wykazać, że jeśli $x = a\cos u$ i $y = b\sin u$, to $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

282. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

283! Wykazać, że $\sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ i znaleźć $\cos 15^\circ$.

284. Wykazać, że $\operatorname{tg} 7{,}5^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$.

285. Wykazać, że $\sin 7{,}5^\circ = \sqrt{\frac{1}{8}(4 - \sqrt{2} - \sqrt{6})}$.

286. W trójkącie ABC mamy $AC = BC = 1$ i $\sphericalangle C = 36^\circ$. Znaleźć AB oraz $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\sin 54^\circ$. Można posłużyć się twierdzeniem o dwusiecznej. Którego kąta?

287*. Wykazać, że $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7} = 7$.

288! Rozwiązać $x^2 - 4x - \sin\frac{\pi x}{4} + 5 = 0$.

289! Nie używając tablic, kalkulatorów, komputerów ... znaleźć sumę

$$\log(\operatorname{tg} 1^\circ) + \log(\operatorname{tg} 2^\circ) + \log(\operatorname{tg} 3^\circ) + \ldots + \log(\operatorname{tg} 88^\circ) + \log(\operatorname{tg} 89^\circ).$$

290! Rozwiązać równanie $2\log_3 \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 1$.